

Didattica della Matematica

17 marzo 2020
Prof.ssa Eliana Francot

π

Che cos'è una buona definizione?



Per il filosofo, o l'uomo di scienza, è una definizione che si applica a tutti gli oggetti definiti e soltanto a questi; è una definizione che soddisfa alle regole della logica. Ma non è così per ciò che concerne l'insegnamento: una buona definizione è quella che viene compresa dagli alunni.

(Poincaré *Le definizioni matematiche e l'insegnamento da Scienza e metodo* 1908)

Concept image e concept definition

D. Tall e S. Vinner *Concept images e concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity*, Educational studies in Mathematics, (1981) 12 pp. 151-169

π

CONCETTO MATEMATICO C

π

Concept definition

Definizione formale

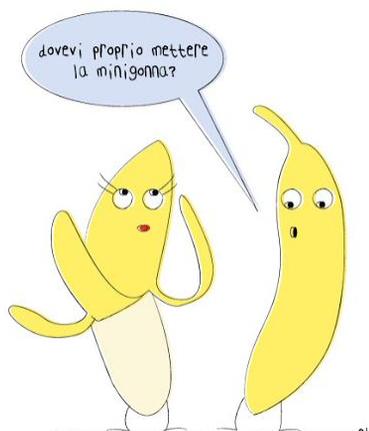
Concept image

- Insieme delle strutture cognitive che un individuo associa a C
- Si modifica negli anni attraverso esperienze di natura diversa
- Può essere una rappresentazione visuale di C
- Può essere un insieme di impressioni o esperienze

Queste rappresentazioni visuali, immagini mentali, possono essere tradotte in forma verbale

GELOSIA

Concept definition: sentimento tormentoso provocato dal timore, dal sospetto o dalla certezza di perdere la persona amata ad opera di altri.



Concept image



In generale i concetti **vengono acquisiti senza imparare le definizioni**, però a volte può aiutare riferirsi a una definizione.

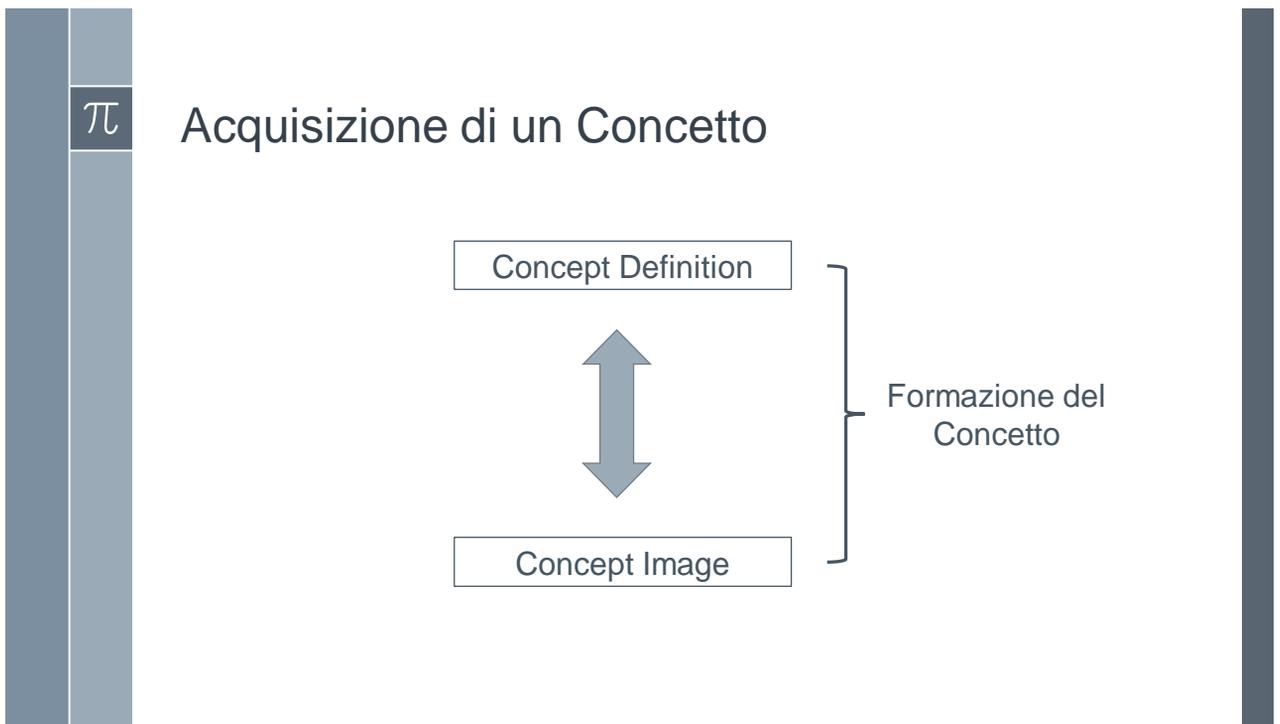
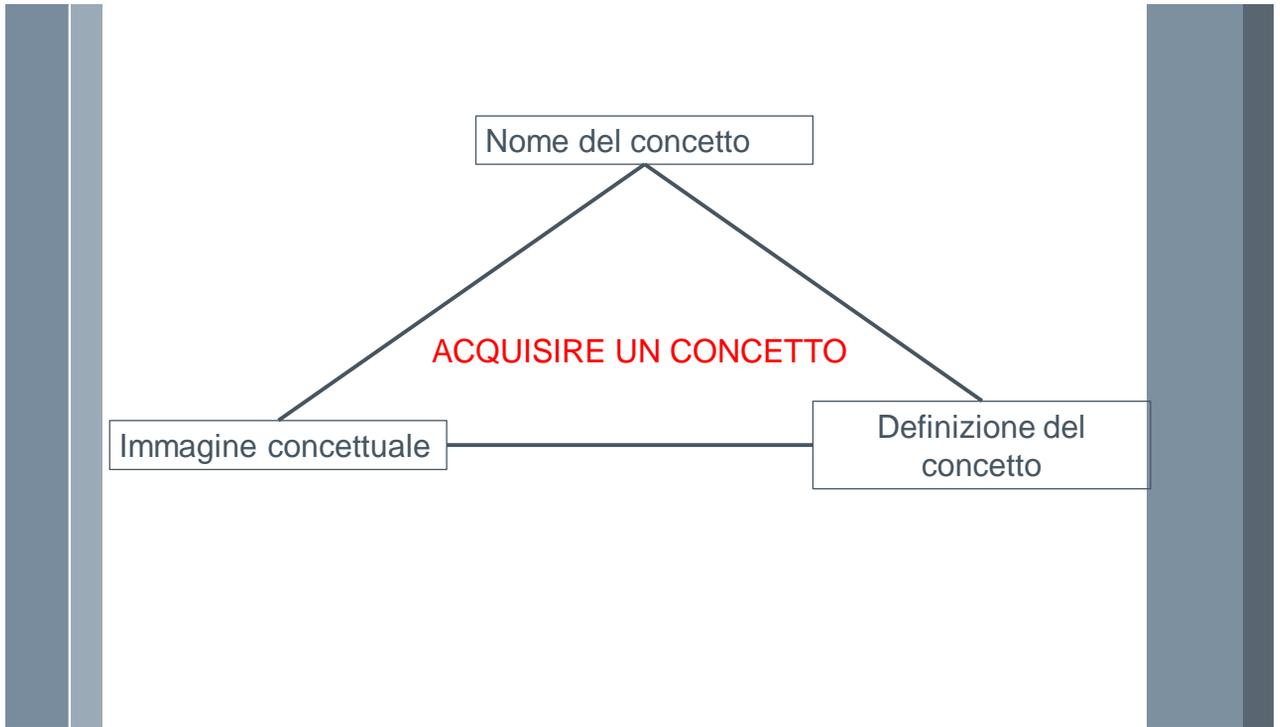
C = funzione

Concept image

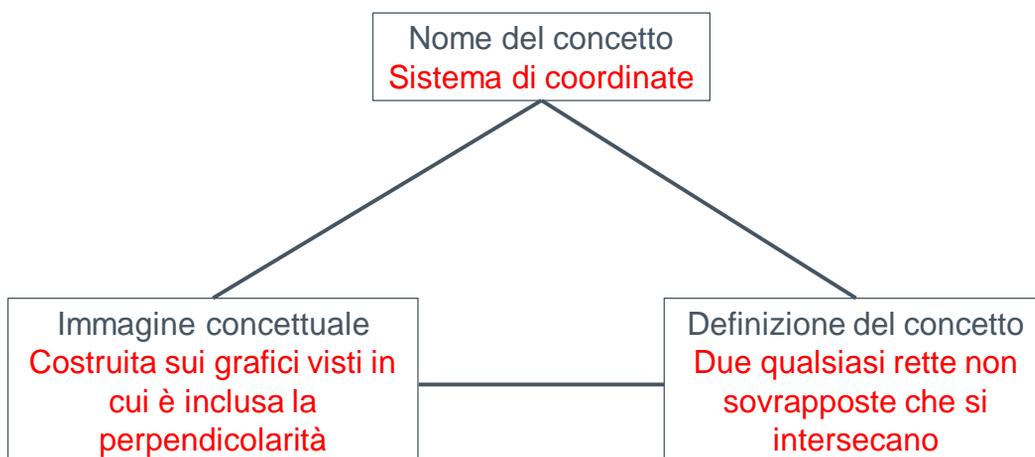
- Immagini come $y = f(x)$, $y = x^2$, $y = \sin x$, $y = \ln x$
- Un grafico

Consegna: «Trova il massimo di una funzione in un intervallo chiuso»

E' fondamentale sapersi rifare ad una **Concept definition**



Esempio

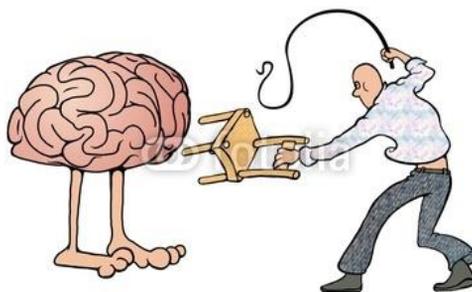


π Conflitto cognitivo

- 2 concetti
- 2 Immagini
- un'immagine ed un concetto
- un modello intuitivo che non corrisponde al modello matematico del concetto ed il modello matematico stesso

π Conflitto cognitivo

In ogni caso c'è una lotta tra il desiderio inconsapevole di tenere salda un'immagine acquisita e nuove informazioni su un concetto che essa non riesce ad inquadrare



Può succedere che

Immagine concettuale:



Definizione del concetto.

Due qualsiasi rette non sovrapposte che si intersecano

Immagine concettuale:



Definizione del concetto.

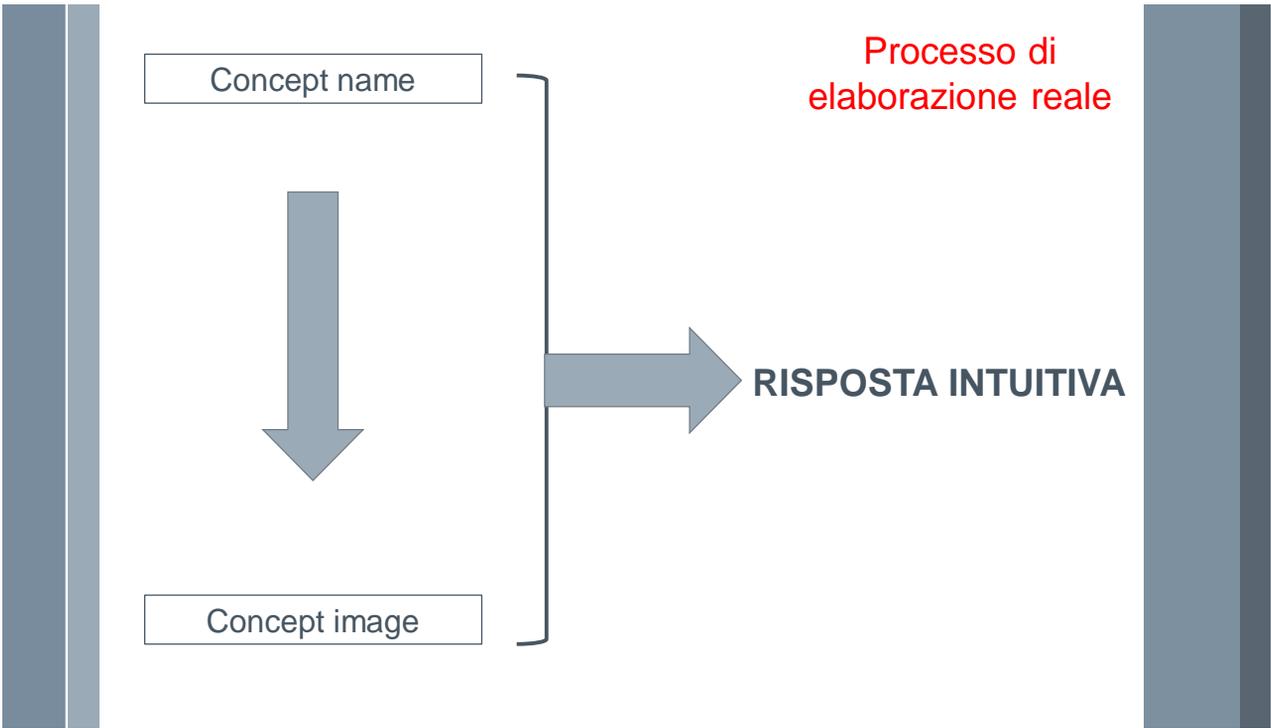
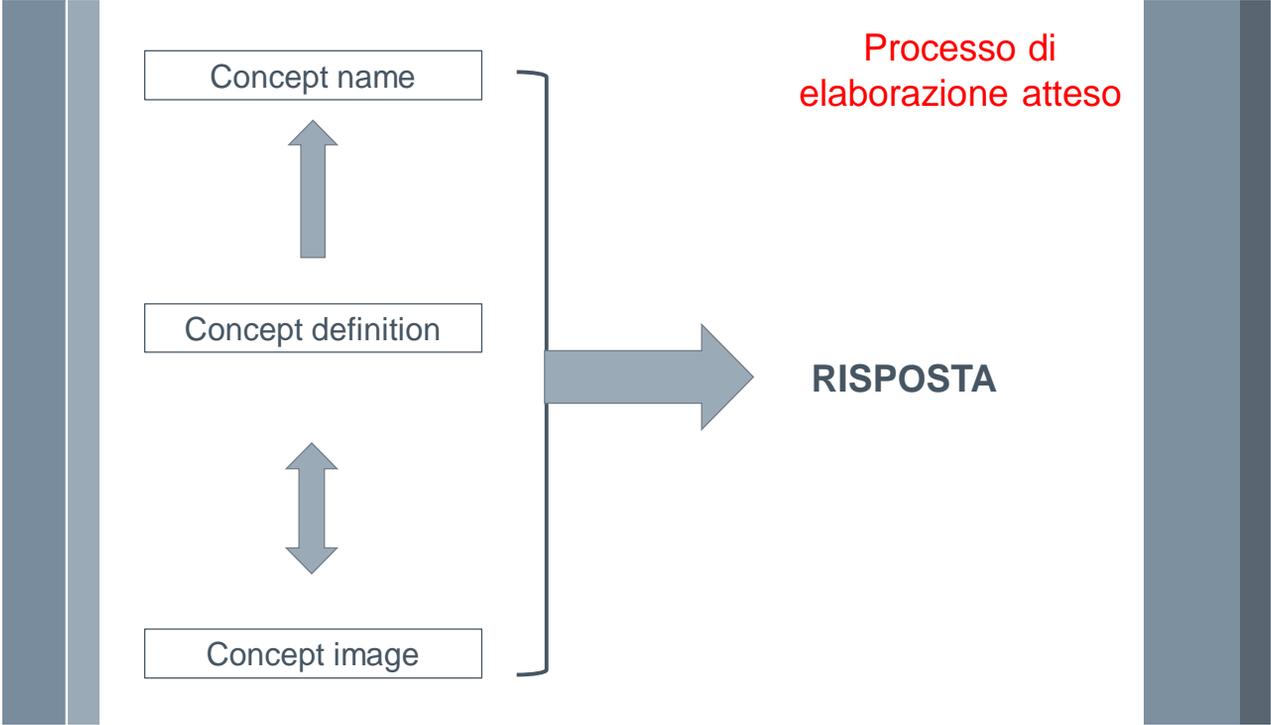
Due rette perpendicolari che si intersecano

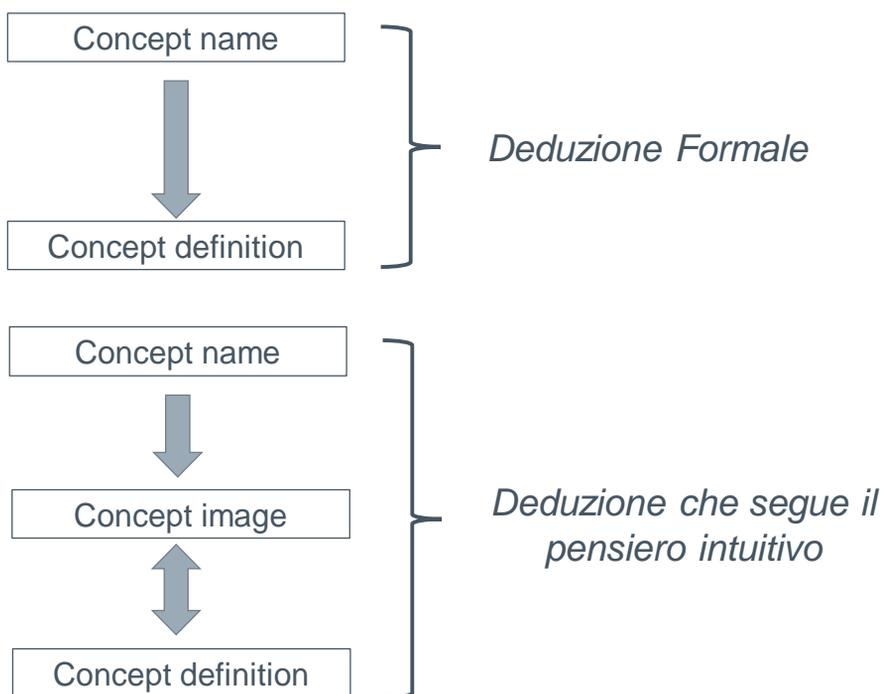
Immagine concettuale:



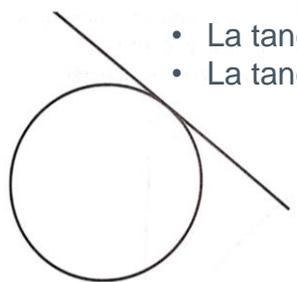
Definizione del concetto.

Due qualsiasi rette non sovrapposte che si intersecano



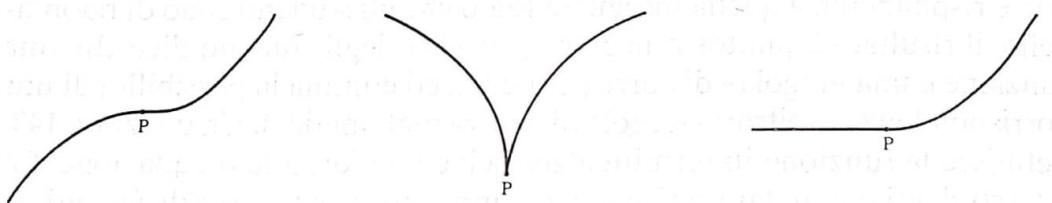


Come conoscere la Concept Image?



- La tangente tocca la curva in un punto
- La tangente non può attraversare la curva in quel punto

278 studenti del I anno di università (scienze/ingegneria) che frequentano un corso di analisi



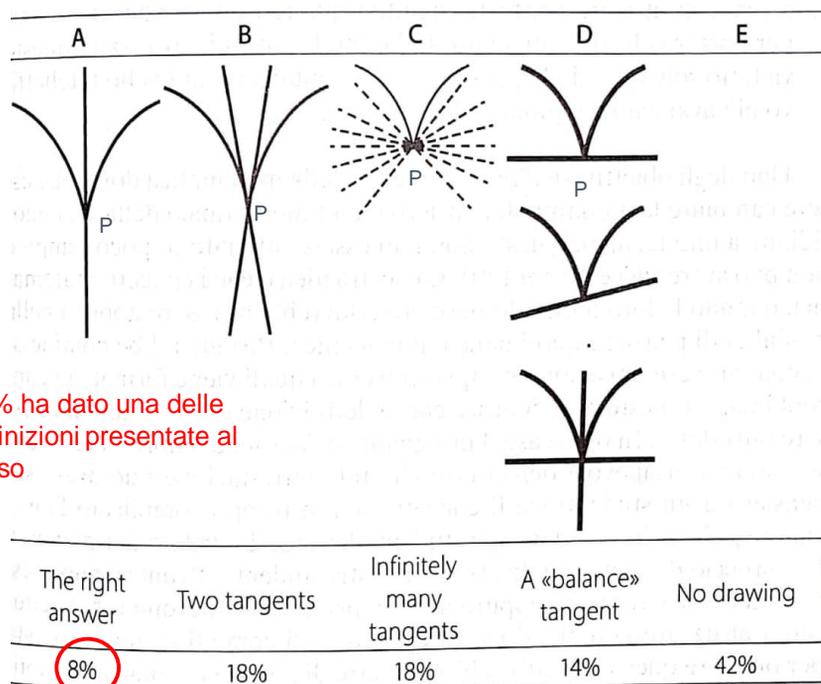
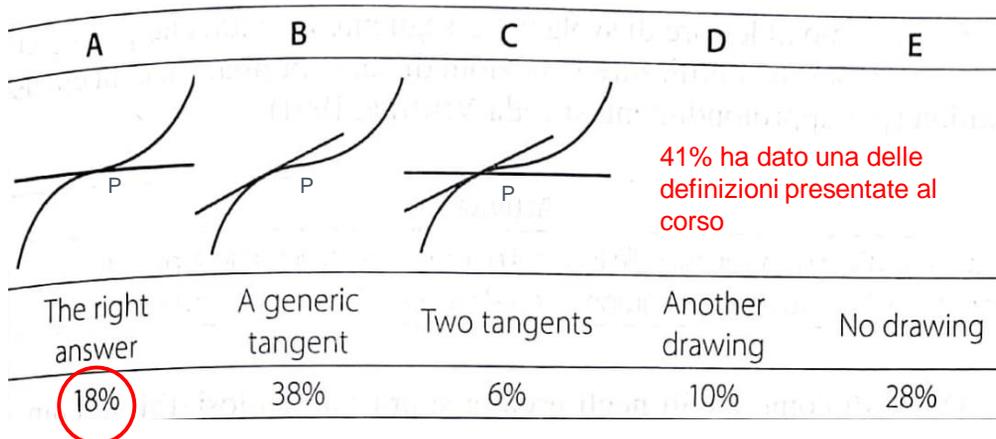
- I. Per ognuno dei 3 casi scegli l'affermazione che ti sembra corretta fra le 3 elencate sotto:
1. Per P è possibile condurre esattamente una tangente alla curva (disegnala)
 2. Per P è possibile condurre più di una tangente (specifica quante: 2, 3, infinite. Disegnale tutte se sono in numero finito e alcune se sono infinite)
 3. Per P è possibile condurre tangenti alla curva
- II. Qual è la definizione di tangente che ti ricordi da questo corso o da corsi precedenti? Se non te ne ricordi nessuna cerca di definirla con le tue parole

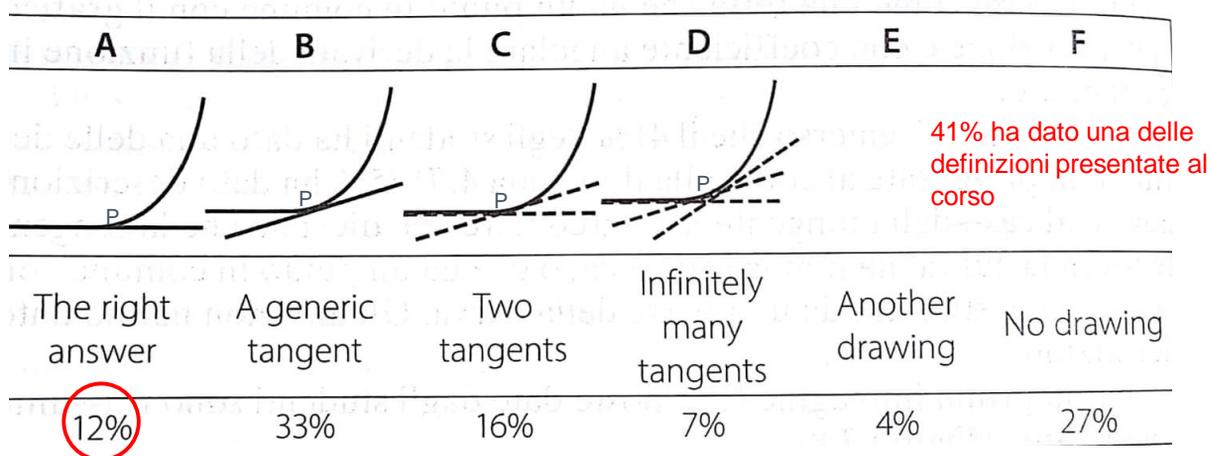
II. Qual è la definizione di tangente che ti ricordi da questo corso o da corsi precedenti? Se non te ne ricordi nessuna cerca di definirla con le tue parole

- 41% ha dato una delle definizioni presentate al corso
- 35% ha dato descrizioni adatte al caso della tangente alla circonferenza
- gli altri non hanno dato definizioni

I. Scegli l'affermazione che ti sembra corretta fra le 3 elencate sotto:

1. Per P è possibile condurre esattamente una tangente alla curva (disegnala)
2. Per P è possibile condurre più di una tangente (specifica quante: 2, 3, infinite). Disegnale tutte se sono in numero finito e alcune se sono infinite)
3. Per P è possibile condurre tangenti alla curva




 π

Due regole didattiche

1. Evitare agli studenti conflitti cognitivi non necessari;
2. cercare di attivare conflitti cognitivi quando questi sono necessari per portare gli studenti ad uno stadio intellettuale più avanzato

Come procedere quindi in pratica?

1. Presentare molti esempi e non–esempi e usare diversi registri di rappresentazione  formazione della concept image
2. Introdurre la concept definition (insegnante e libro) facendone sentire la necessità e ancorandola su una concept image molto ricca che sia in grado di sostenerla.
3. Approccio diverso a seconda del livello di matematica da affrontare

3. Approccio diverso a seconda del livello di matematica da affrontare:

Non avanzato:

- evitare tali conflitti, essendo consapevoli che anche se lo studente enuncia correttamente la definizione, non è detto che la sappia applicare se in conflitto con l'immagine  puntare a una costruzione corretta dell'immagine piuttosto che alla memorizzazione della definizione.

Avanzato:

- educare all'uso della definizione formale, evidenziando conflitti tra immagine e definizione e discutendoli;
- non dare solo compiti risolvibili tramite l'immagine  provocare il fallimento  convincere della necessità della definizione e dell'armonizzazione immagine/definizione.

Possibile attività di *ricerca-azione* in classe:

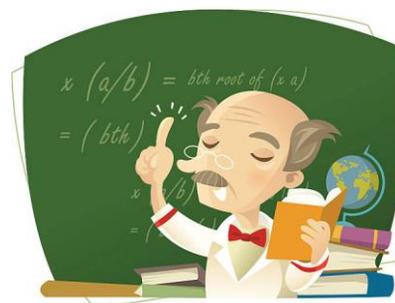
1. Scegliere e formulare una definizione;
2. Individuare possibili concept image associati alla definizione scelta;
3. Progettare attività finalizzate a:
 - i. Portare alla luce tali concept image;
 - ii. Creare un conflitto tra concept definition e concept image;
 - iii. Forzare gli allievi a far riferimento alla concept definition.

«Siamo in una classe quarta; il professore detta

La circonferenza è il luogo dei punti del piano equidistanti da un punto interno detto centro.

L'alunno diligente scrive questa frase sul quaderno, quello negligente disegna pupazzetti, ma né l'uno né l'altro hanno capito. Il professore prende allora il gesso e traccia una circonferenza sulla lavagna. *Ah, pensano i ragazzi, perché non l'ha detto subito; una circonferenza è un tondo avremmo subito capito.»*

(Poincaré *Le definizioni matematiche e l'insegnamento da Scienza e metodo* 1908)



Teoria dei Concetti Figurali

 π 

Efraim Fischbein
1920 - 1998

EFRAIM FISCHBEIN

THE THEORY OF FIGURAL CONCEPTS

ABSTRACT. The main thesis of the present paper is that geometry deals with mental entities (the so-called geometrical figures) which possess simultaneously conceptual and figural characters. A geometrical sphere, for instance, is an abstract ideal, formally determinable entity, like every genuine concept. At the same time, it possesses figural properties, first of all a certain shape. The ideality, the absolute perfection of a geometrical sphere cannot be found in reality. In this symbiosis between concept and figure, as it is revealed in geometrical entities, it is the image component which stimulates new directions of thought, but there are the logical, conceptual constraints which control the formal rigour of the process. We have called the geometrical figures *figural concepts* because of their double nature. The paper analyzes the internal tensions which may appear in figural concepts because of this double nature, development aspects and didactical implications.

Educational studies in Mathematics, (1993) 24 (2) pp. 139-162

- esprime un'idea, una rappresentazione ideale e generale di una classe di oggetti;
- basato sulle loro caratteristiche comuni

Concetto

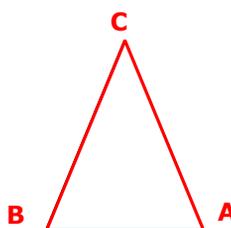
- Rappresentazione sensoriale di un oggetto o di un fenomeno

Immagini mentali

ANNI '90

π

Si consideri un triangolo isoscele ABC sulla base AB, si vuole dimostrare che l'angolo in A è uguale all'angolo in B



Si immagini di separare il triangolo ABC da se stesso, rovesciarlo e sovrapporre il lato AC all'originaria posizione del lato BC, e il lato BC all'originaria posizione del lato AC.

Il **nuovo triangolo BAC** e il **vecchio triangolo ABC** hanno uguali due lati (infatti $AC=BC$) e l'angolo tra essi compreso (poiché $\hat{C} = \hat{C}$).

Quindi sono uguali e in particolare avranno uguali gli angoli corrispondenti:
 $\hat{A} = \hat{B}$.

Una figura geometrica possiede, intrinsecamente, proprietà concettuali, ma non è un concetto, e preserva la sua spazialità pur non essendo una mera immagine visiva.

CONCETTO FIGURALE

π

Cosa abbiamo manipolato nella dimostrazione?

- **Non un concetto...**

I concetti non possono essere separati, rovesciati e sovrapposti.

- **Non un'immagine mentale...**

Non si può concretamente separare un oggetto da se stesso. Verrebbe a mancare l'input sensoriale che origina l'immagine.

- Quindi...

Abbiamo manipolato un'entità ideale e concettuale, ma con un'intrinseca natura **figurale**.

π

I concetti figurali...

- **Condividono con i concetti**

- Le proprietà di astrattezza, generalità, perfezione, stabilità
- Il fatto che le loro caratteristiche sono interamente determinate dalla definizione e dai postulati della teoria formale in cui sono inseriti

- **Condividono con le immagini mentali**

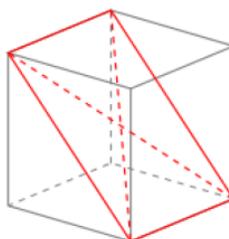
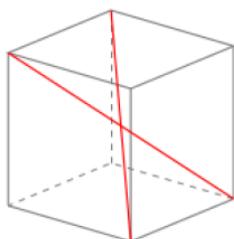
Le proprietà spaziali (forma, posizione, grandezza)

- **Differiscono dai disegni perché**

- Un disegno è un modello materiale e concreto, un concetto figurale è un oggetto mentale astratto
- Un disegno è specifico, un concetto figurale è sempre generale
- Un disegno ha proprietà sensoriali non spaziali (ad es. il colore), in un concetto figurale si astrae da queste proprietà.

Un esempio

Dato un cubo considerare le sue diagonali:
sono tra loro perpendicolari?



Fondendo aspetti concettuali e figurali ragiono correttamente.

π

Dall'oggetto al concetto

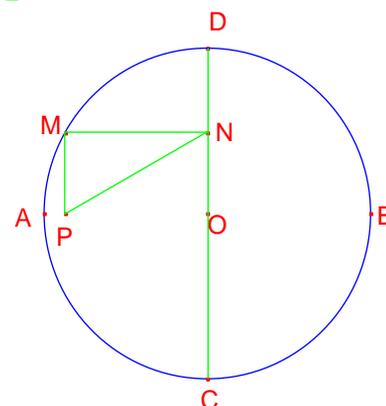
Dato un cerchio di centro O si disegnino due diametri perpendicolari AB e CD .

Scegliamo un punto M sul cerchio e tracciamo le perpendicolari MP e MN sui due diametri.

Qual'è la lunghezza di PN ?

Il fatto di concludere che $PN=MO=$ raggio $=$ costante, supporta l'idea che la figura considerata non è un'immagine ordinaria, ma è già una struttura logicamente controllata.

In questo caso la fusione tra *concetto* e *figura* tende ad essere perfetta.

 π

Concetto figurale

Fishbein introduce la nozione di **concetto figurale** per descrivere la costruzione mentale manipolata da un ragionamento geometrico

Una figura geometrica può essere descritta come avente intrinsecamente proprietà concettuali.

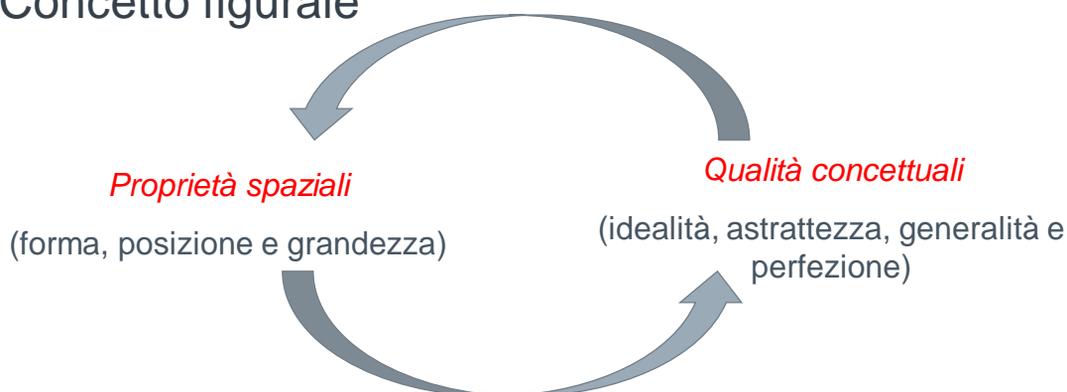
Tuttavia una figura geometrica non è puro concetto.

È un'immagine visiva, possiede una proprietà che i concetti usuali non possiedono, cioè include la rappresentazione mentale di proprietà spaziali.

Tutte le figure geometriche rappresentano costruzioni mentali che possiedono simultaneamente proprietà concettuali e figurali.

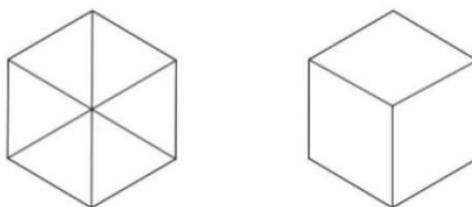
π

Concetto figurale



«una situazione ideale, estrema, che vincoli psicologici (uno legato alla percezione sensoriale e l'altro legato al dominio concettuale) non permettono di raggiungere completamente» (Fischbein, 1993)

A latere: visione e visualizzazione



Ci sono differenze tra il primo e il secondo disegno?

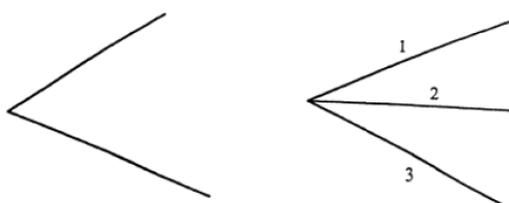
Parafrasando Duval: la *visione* è il processo che fornisce un accesso diretto a qualsiasi oggetto fisico, mentre la *visualizzazione* coinvolge un atto cognitivo, non consiste solo nel percepire ciò che è visibile agli occhi, bensì nell'osservare e capire ciò che è realmente rappresentato.

«Visualization makes visible all that is not accessible to vision»

(Representation, Vision and Visualization. Cognitive function in Mathematical Thinking, 1999)

Un altro esempio

Quanti angoli
vedi
nelle due figure?



Alessia (16 anni): *Quando vedo due semirette che si intersecano, so che lo spazio tra le due semirette è un angolo. Credo che in entrambe le figure ci sia solo un angolo, anche se all'inizio ho pensato che nella seconda figura ce ne fossero due. Posso spiegare la mia ipotesi.*

All'inizio ho pensato che in questo disegno la retta 1 e 2 formassero un angolo, e la linea 2 e 3 un altro angolo. Tuttavia, adesso penso che c'è un solo angolo formato dalle rette 1 e 3 e che la retta 2 sia la bisettrice.

(da Mariotti Immagini e concetti in geometria 1992)

Se la componente concettuale e figurale entrano in **conflitto** nascono errori e difficoltà.

Il problema

La componente figurale tende a liberare sé stessa dal controllo formale e a comportarsi in maniera autonoma.

In quale segmento ci sono più punti?

Il concetto che il punto non ha dimensioni va in contrasto con l'immagine del punto che ha dimensioni.

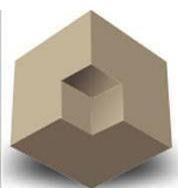
«The **processes of building** figural concepts in the student's mind should not be considered a spontaneous effect of usual geometry courses. The integration of conceptual and figural properties in unitary mental structures with the predominance of the conceptual constraints over the figural ones, is not a natural process. It should constitute a continuous, systematic and main preoccupation of the teacher.»

π

Concetto figurale

Risulta didatticamente importante far percepire la varietà di interpretazione e gli “inganni” che si celano nelle rappresentazione iconiche, spesso legati a fattori percettivi.

A questo scopo occorre sensibilizzare gli allievi ad un “pensiero visivo” acuto e critico, per renderli “diffidenti” nei confronti dell’aspetto figurale ed essere così capaci di far prevalere l’aspetto concettuale.



Un cubo con una concavità cubica o un cubetto in un angoloide?



Il viso di un indiano o un eschimese di spalle?

 π

Concetto figurale

Confrontando le proprie letture, gli studenti si rendono conto della validità di ognuna di esse e, di conseguenza, di come, talvolta, la percezione sia “inaffidabile” per un riconoscimento univoco e certo delle rappresentazioni.

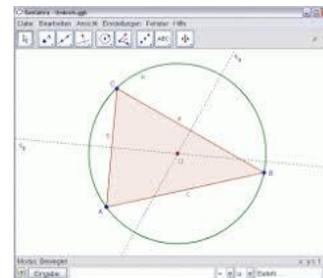
Può anche capitare che siano gli insegnanti stessi a mostrare una figura e a dare per scontata la sua interpretazione, considerandola ovvia e univoca;

ma ciò che quell’immagine può evocare nell’allievo può essere completamente diverso, ma allo stesso tempo valido e accettabile, rispetto a quello che l’insegnante si aspetta in quel momento.

Per controllare l’attinenza delle interpretazioni è quindi importante esplicitare e comunicare ciò che si osserva e far sì che l’aspetto figurale sia gestito da quello concettuale.

π

Concetto figurale



- ✓ Le figure sono *dinamiche*, possono essere trascinate
- ✓ il comportamento di una figura durante il trascinamento dipende da come è stata costruita

Il comportamento dell'immagine, di questa esplicitazione degli aspetti figurali, dipende da proprietà teoriche che abbiamo inglobato nel disegno, dipende quindi da aspetti concettuali.

LABORATORIO CON GEOGEBRA

