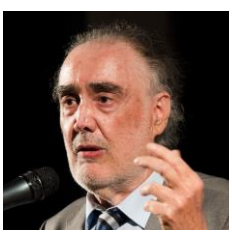
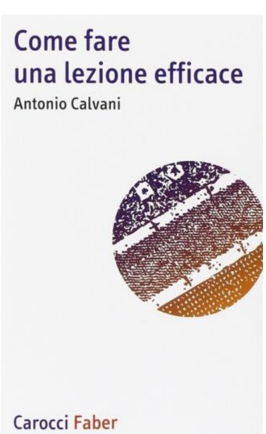
Didattica della Matematica

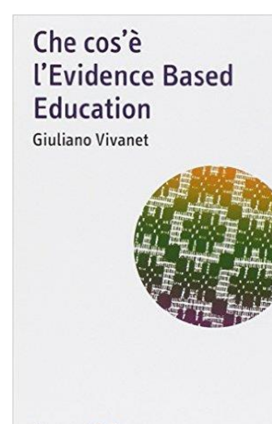
4 maggio 2020
Prof.ssa Eliana Francot



A. Calvani

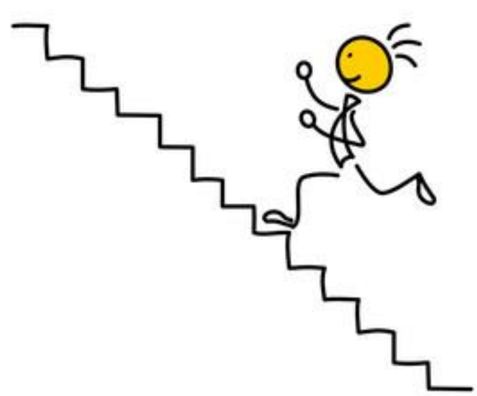


G. Vivanet



Caratteristiche e progettazione di una «Lezione efficace»

Riduzione a scala delle matrici di tipo mxn



Obiettivo

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ -2 & 8 & -1 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Cos’è una matrice?

- Quali tipi di matrici conoscete?

Sia $\mathbb{K}$ un campo. Se m ed n sono numeri naturali, si chiama *matrice ad m righe ed n colonne*, o *matrice di tipo $m \times n$* ad elementi in $\mathbb{K}$, un insieme di mn scalari a_{ij}

$$a_{ij} \in \mathbb{K}, (i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n)$$

rappresentato da una tabella del tipo:

$$\begin{array}{ccc} & \text{Colonna} & \\ A = & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} & \text{Riga} \end{array}$$

Lo scalare a_{ij} è l'elemento di A che si trova nella i^{sima} riga e j^{sima} colonna.

Con questa notazione possiamo rappresentare in modo compatto la matrice A con $A = (a_{ij})$ con $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$.

Indichiamo con $\mathbb{K}^{m,n}$ l'insieme delle matrici ad m righe ed n colonne ad elementi in $\mathbb{K}$.

Definition 1 *Una matrice si dice a scala se soddisfa entrambe le seguenti proprietà:*
1) Se una riga è nulla, allora tutte le righe ad essa sottostanti sono nulle.
2) Sotto il primo elemento non nullo di ciascuna riga, e sotto tutti gli zeri che lo precedono, ci sono elementi nulli.

$$\left|\begin{array}{cccccccccccccc} 0 & \ldots & 0 & p_1 & * & \ldots & * & * & * & \ldots & * & * & * & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & p_2 & * & \ldots & * & * & * & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & p_3 & * & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & * & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & * & \ldots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & * & \ldots \end{array}\right|$$

ESEMPI

Le seguenti matrici sono a scala:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 2 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

mentre

$$D = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

non è a scala, per esserlo, sotto l'elemento $a_{23} = 3$, ci dovrà essere uno zero.
Il primo elemento non nullo di ciascuna riga di una matrice a scala è detto **pivot**.

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ -2 & 8 & -1 & 3 & -6 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{array} \end{array}$$

Operazioni elementari sulle righe.

1. Scambiare due righe della matrice.
2. Moltiplicare una riga per un numero non nullo.
3. Sommare a una data riga un multiplo di un'altra riga della matrice.

La notazione simbolica che useremo per le operazioni elementari è la seguente. Indichiamo con $r_1, \ldots, r_m$ le righe della matrice. Allora:

1. $r_i \leftrightarrow r_j$ scambia la i-esima riga con la j-esima riga.
2. $r_i \to kr_i$ moltiplica la i-esima riga per k.
3. $r_i \to r_i + kr_j$ sostituisce la i-esima riga con la somma della i-esima riga e la j-esima riga moltiplicata per k.

Definition 2 *La matrice A' si dice equivalente per righe alla matrice A se A' si ottiene da A mediante una successione di operazioni elementari sulle righe.*

Proposition 1 *Con un opportuno uso delle operazioni elementari sulle righe, è sempre possibile ridurre una qualunque matrice A a una matrice a scala A' ad essa equivalente per righe. In particolare, ogni matrice è equivalente per righe a una matrice a scala.*

Algoritmo di Gauss.
L'algoritmo prevede in ingresso una data matrice A, $m \times n$, ed in uscita una matrice S a scala per righe, equivalente per righe ad A.
Passo 1.
1.1 Se la matrice è formata da una sola riga, l'algoritmo termina; altrimenti:
1.2 individuare la colonna non nulla con indice più basso, ed il suo pivot, cioè la sua prima componente non nulla; se non esistono colonne non nulle, la matrice è nulla, quindi è già a scala e in questo caso l'algoritmo termina qui.
1.3 Se il pivot è nella riga di posto i, scambiare la prima riga con quella di posto i.
1.4 Rendere nulle tutte le altre componenti della colonna che contiene il pivot della prima riga, sommando alle varie righe opportuni multipli della prima.
Passo 2.
Ripetere il passo 1 sulla matrice ottenuta dal passo precedente, schermandone però la prima riga.
Passo 3.
Ripetere il passo 2 sulla matrice schermata, fino ad esaurimento delle righe.
L'algoritmo di Gauss e ci permette di dimostrare la seguente

Esempio n.1

Utilizzando l'algoritmo di Gauss, ridurre la seguente matrice A in una ad essa equivalente che sia a scala

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ -2 & 8 & -1 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ -2 & 8 & -1 & 3 & -6 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} r_1 \to r_1 \\ r_2 \to r_2 \\ r_3 \to -r_1 + r_3 \\ r_4 \to 2r_1 + r_4 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} r_1 \to r_1 \\ r_2 \to r_2 \\ r_3 \to -r_2 + r_3 \\ r_4 \to -3r_2 + r_4 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esempio n.2

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & -5 & -3 \\ 3 & -4 & 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & -5 & -3 \\ 3 & -4 & 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} r_1 \to r_1 \\ r_2 \to r_2 \\ r_3 \to -3r_1 + 2r_3 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & -5 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & -5 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & 5 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} r_1 \to r_1 \\ r_2 \to r_2 \\ r_3 \to r_2 + r_3 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sistemi lineari e matrici a scala.

Un sistema lineare di m equazioni in n incognite $x_1, x_2, \ldots, x_n$ è un sistema del tipo

$$(*)\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right.$$

matrice dei coefficienti

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & & & & & \\ . & & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_m \end{pmatrix}$$

matrice dei termini noti

$$(A, B) = \left(\begin{array}{cccccc|c} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} & b_2 \\ . & & & & & & . \\ . & & & & & & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

matrice completa

Definition 3 *Un sistema lineare si dice a scala se la sua matrice completa è una matrice a scala.*

$$\left\{\begin{array}{llllllll} p_1x_{r_{11}}+ & *x_{r_{12}}+ & . & . & . & . & . & + * x_{r_{1n}} = b'_1 \\ & & p_2x_{r_{21}}+ & *r_{r_{23}}+ & . & . & . & + * x_{r_{2n}} = b'_2 \\ & & & & p_3x_{r_{31}}+ & *x_{r_{32}}+ & . & + * x_{r_{3n}} = b'_3 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ & & & & & & & p_sx_{r_{sr}} = b'_s \end{array}\right.$$

$$\begin{bmatrix} p_1 & * & \ldots & * & * & * & \ldots & * & * & * \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & p_2 & * & \ldots & * & * & * \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & p_3 & * \end{bmatrix}$$

Definition 4 *Due sistemi lineari si dicono equivalenti se hanno lo stesso insieme di soluzioni.*

Consideriamo ora le seguenti operazioni su un sistema lineare, dette operazioni elementari:

1. Scambiare due equazioni del sistema. $\boxed{r_i \leftrightarrow r_j}$
2. Moltiplicare un'equazione per uno scalare non nullo. $\boxed{r_i \to kr_i}$
3. Sommare a una data equazione un multiplo di un'altra equazione del sistema $\boxed{r_i \to r_i + kr_j}$

E facile vedere che, se applichiamo una qualunque di tali operazioni ad un sistema, otteniamo un sistema avente le stesse soluzioni di quello di partenza: cioè, le operazioni elementari non alterano l'insieme delle soluzioni, e producono via via sistemi equivalenti al sistema di partenza.
Sappiamo che un sistema lineare è univocamente determinato dalla sua matrice completa. Le equazioni corrispondono alle righe, dunque le operazioni elementari sui sistemi corrispondono alle operazioni elementari sulle righe della matrice completa associata al sistema.
Possiamo quindi concludere che:

i) Matrici equivalenti per righe rappresentano sistemi lineari equivalenti.

ii) Ogni sistema lineare è equivalente a un sistema lineare a scala.

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = -2 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = -1 \\ -x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 2 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 1 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

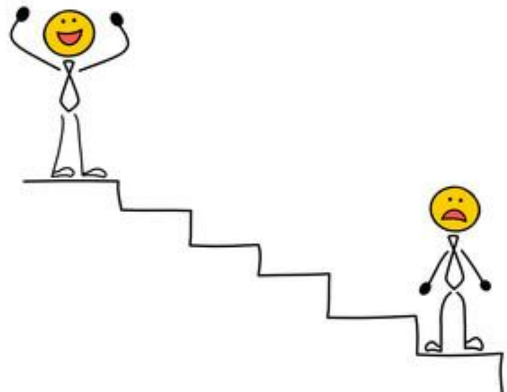
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} r_1 \to r_1 \\ r_2 \to -2r_1 + r_2 \\ r_3 \to r_3 \\ r_4 \to -3r_1 + r_4 \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & 1 & 7 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & 1 & 7 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} r_1 \to r_1 \\ r_2 \to r_2 \\ r_3 \to r_2 + r_3 \\ r_4 \to 3r_2 + r_4 \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -8 & 4 & 16 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -8 & 4 & 16 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} r_1 \to r_1 \\ r_2 \to r_2 \\ r_3 \to r_3 \\ r_4 \to -2r_3 + r_4 \end{array} \quad \boxed{\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 6 \end{array}\right)}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = -2 \\ x_2 - 2x_3 + x_4 = 3 \\ -4x_3 - x_4 = 5 \\ 6x_4 = 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_4 = 1 \\ x_3 = -\frac{3}{2} \\ x_2 = -1 \\ x_1 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Mettiamoci alla prova



Date le seguenti matrici utilizzare l'eliminazione di Gauss per ridurle in forma a scala:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

RICAPITOLANDO

Matrice di tipo $m \times n$ ad elementi reali $A = (a_{ij})$ con $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & & & & & \\ . & & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} r_i \leftrightarrow r_j \\ r_i \rightarrow kr_i \\ r_i \rightarrow r_i + kr_j \end{array}\right\} \text{Operazioni elementari sulle righe}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & & & & & \\ . & & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} p_1 & * & . & . & . & . & . & . & * \\ 0 & . & . & p_2 & * & . & . & . & * \\ 0 & . & . & 0 & . & p_3 & * & . & * \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & 0 & . & 0 & . & 0 & p_r \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \longrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} & b_2 \\ . & & & & & & . \\ . & & & & & & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} p_1 & * & . & . & . & . & . & . & * \\ 0 & . & . & p_2 & * & . & . & . & * \\ 0 & . & . & 0 & . & p_3 & * & . & * \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & 0 & . & 0 & . & 0 & p_r \end{pmatrix}$$

$$\swarrow$$

$$\begin{cases} p_1 x_{r_{11}} + \quad * x_{r_{12}} + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad + * x_{r_{1n}} = b'_1 \\ \qquad\qquad p_2 x_{r_{21}} + \quad * r_{r_{23}} + \quad . \quad . \quad . \quad + * x_{r_{2n}} = b'_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad p_3 x_{r_{31}} + \quad * x_{r_{32}} + \quad . \quad + * x_{r_{3n}} = b'_3 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad p_s x_{r_{sr}} = b'_s \end{cases}$$

π

OBIETTIVI

VERIFICHE

Progetto
Didattico

ATTIVITA'
DIDATTICHE

π

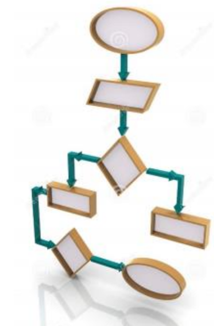
Penso ad una lezione

Come la svolgerei?

Seguirei uno schema ben preciso?

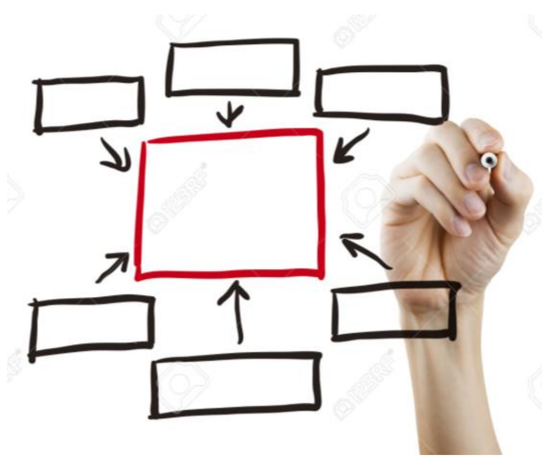
Con quale attività comincerei la lezione?

Con quale la concluderei?

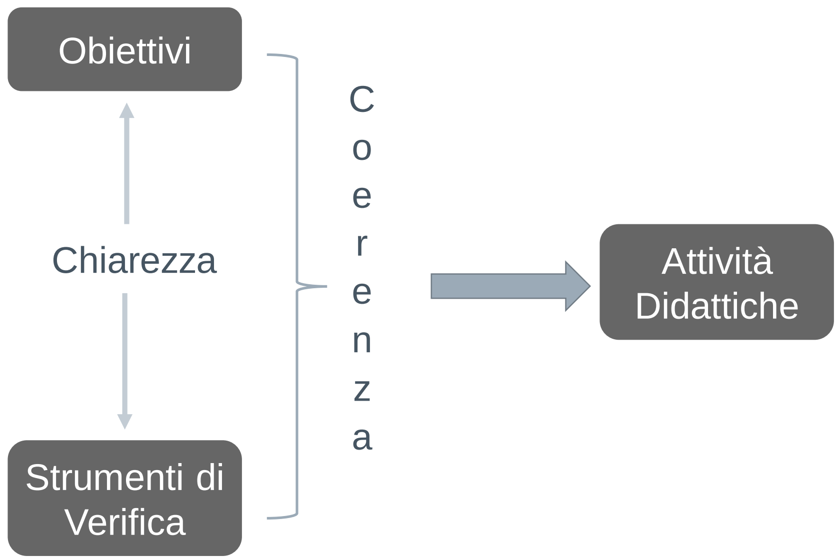


π

Progetto didattico



Requisiti di base di un Progetto Didattico



I punti critici:

Obiettivi mal definiti o formulati in modo generico:

- «Il Teorema di Pitagora»

Un obiettivo NON è un argomento

- «Possedere buona capacità di calcolo»

Un obiettivo NON si identifica con generiche finalità

Definire Obiettivi Operazionalizzati

« Il Teorema di Pitagora»

« Dimostrare il Teorema di Pitagora»

« Possedere buone capacità di calcolo»

« Saper eseguire correttamente una divisione a due cifre»

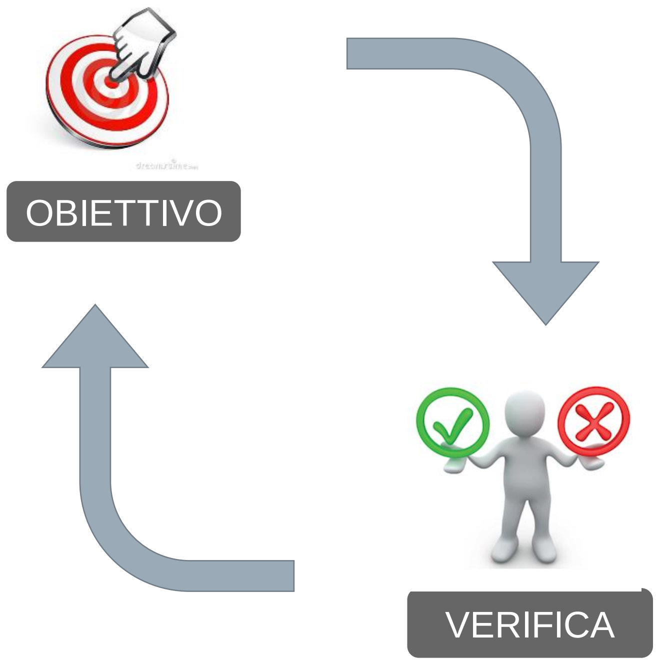
Operazionalizzare gli Obiettivi

Definizione verbale dell’obiettivo

Esempio del Sistema di Verifica

Consiglio progettuale:

- ✓ Formulare obiettivi e sistema di verifica contestualmente, l’uno a fianco dell’altro;
- ✓ stabilire chiare e coerenti corrispondenze.

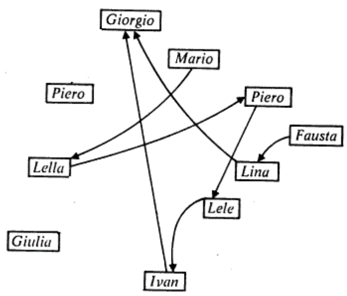


Obiettivo sul piano socio-relazionale

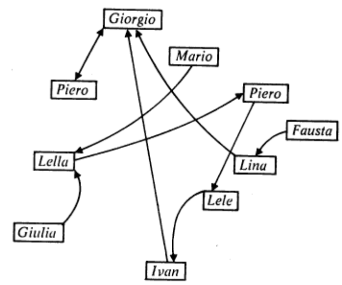
Esempio:

Migliorare la qualità delle relazioni interpersonali nella classe

Obiettivo sul piano socio-relazionale



Prima



Dopo

Traguardo: «Ogni alunno deve ricevere almeno una scelta da un compagno»

Situazione di Partenza

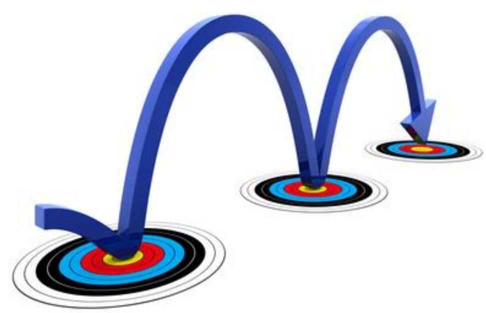
- Distanza
- Tempo stabilito
- Risorse disponibili

Situazione di Arrivo

Situazione di Partenza

- Soggetto destinatario dell'intervento
- Contesto di appartenenza
- Preconoscenze possedute dai destinatari
- Prerequisiti

Obiettivi



- Nel dominio disciplinare
- Oltre il dominio disciplinare

Obiettivi nel dominio disciplinare

1. Conoscenza di base:
termini, concetti, regole, conoscenza dichiarativa (dati, fatti, eventi), conoscenza esplicativa (connessione tra dati, fatti e regole), uso di strumenti e procedure.

2. Conoscenza profonda:
Costruzione, scoperta di relazioni, applicazioni, interpretazioni, estrapolazioni, comparazioni

Obiettivi oltre il dominio disciplinare

1. Conoscenza decontestualizzata:
abilità trasversali, operazioni cognitive di alto livello astrattivo.

2. Abilità integrate in contesti reali:
Processi complessi orientati a contesti esterni.

Sistema di Verifica

› Strumenti di valutazione

› Condizioni di preparazione e applicazione

› Criterio e soglia di valutazione

Strumenti di valutazione

› Metodi a risposta chiusa (questionario a scelta multipla, abbinamenti, cloze con alternative)

› Metodi a risposta aperta univoca

› Metodi a risposta aperta non univoca

› Prove complesse (indagine, report, progetto, soluzione di un problema con rubrica, produzione di un oggetto) Si usano procedure basate su criteri ad hoc per la valutazione

Condizioni di preparazione e applicazione

- Da chi dovrà essere preparata la prova? Dal progettista stesso, che la inserirà per intero nel documento progettuale?
- Dovrà essere conosciuta dal progettista e non dal docente attuatore, qualora sia diverso dal progettista, né dagli studenti?

Condizioni di preparazione e applicazione

Kit di Strumenti di valutazione condiviso

Soglia di valutazione

80 x 80

l'80% degli alunni dovrebbe conseguire
l'80% delle risposte esatte

OBIETTIVI VERIFICHE

Lezione
«Riduzione a scala delle matrici di tipo mxn»

SCHEDA O - V

OBIETTIVI

VERIFICA

Conoscenza di Base	**Strumenti per la verifica**	**Condizioni, Preparazione, Applicazione**	**Criterio soglia**
- Trasformare una matrice qualsiasi in una in forma a scala equivalente per righe	*Tipi di Item*: Esercizio a risposta aperta	Gli item sulle Regole saranno preparati dall'esperto esterno	80% del risultato massimo da parte dell'80% dell'intera classe

Esempio

Utilizzando l'algoritmo di Gauss ridurre in forma a scala ciascuna delle matrici che seguono

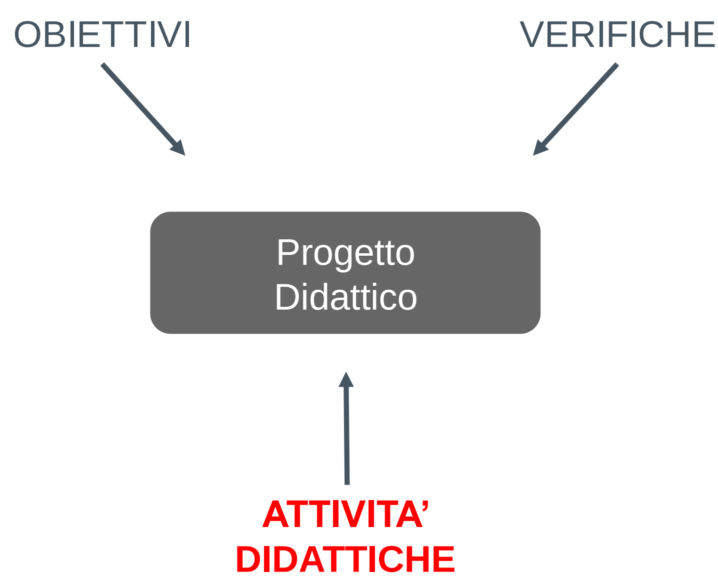
1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & 11 \\ -3 & 1 & 8 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 7 & 9 \\ -3 & 5 & 1 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

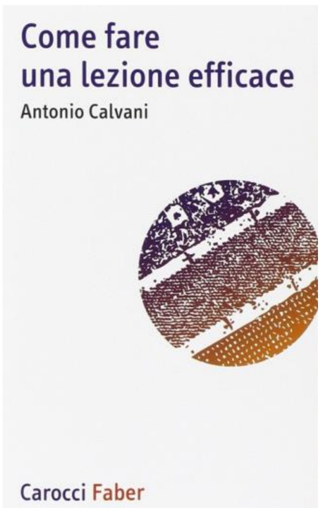
Dimensione:
Il test complessivo per questa specifica sezione è composto da 5 item

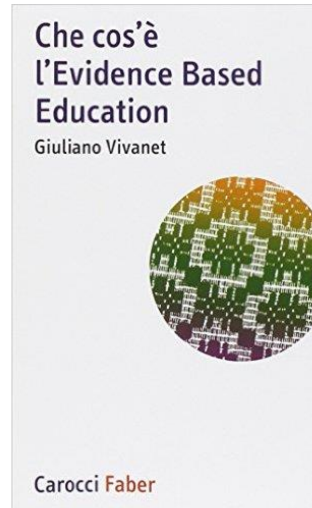
Tempo consentito:
Il tempo consentito per questa specifica sezione è di 10 minuti

SCHEDA O - V

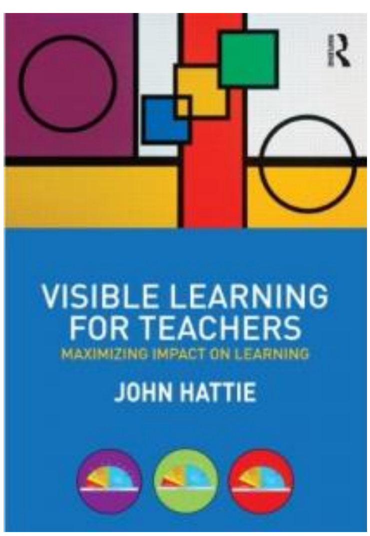


In quale modo rendere più efficace la didattica?





Approccio Evidence based



Società per l'Apprendimento e l'Istruzione informati da Evidenza

S.Ap.I.E.
Società per l'Apprendimento e l'Istruzione informati da Evidenza

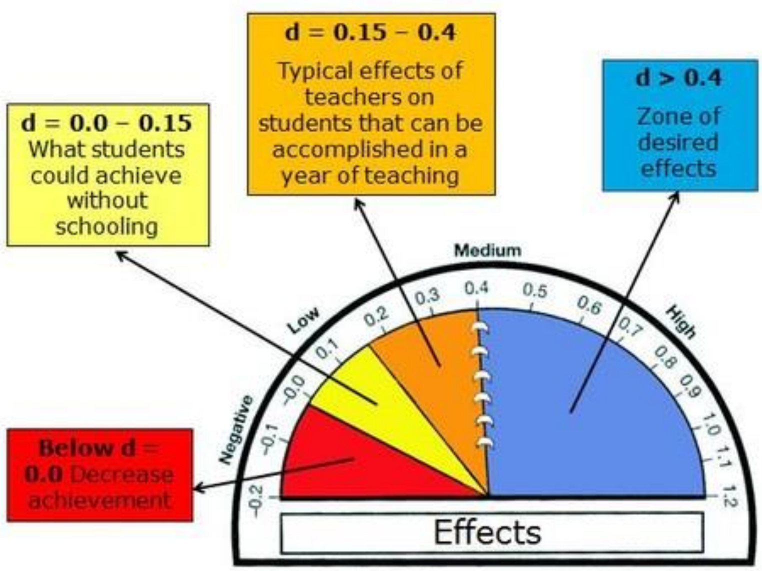
fornire alle scuole:

a) *modelli* di didattica efficace

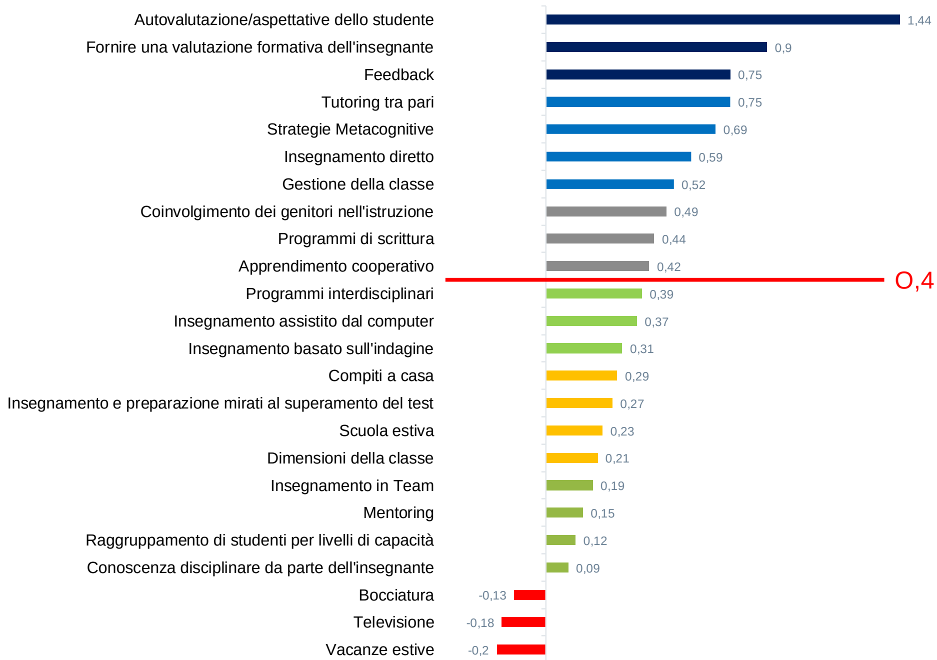
b) *raccomandazioni metodologiche* per il miglioramento degli apprendimenti

sviluppare una cultura critica e consapevole sul ruolo e sull'utilizzabilità dell'evidenza scientifica in educazione.

Ciò che influenza l’apprendimento



Effetti sul Rendimento



Le evidenze scientifiche acquisite indicano che
se vogliamo migliorare gli apprendimenti nella classe

è fondamentale

trasformare la lezione espositiva tradizionale (monologo dell'insegnante),

in un altro modello di lezione, una lezione interattiva, rispettosa di alcuni principi fondamentali che presiedono ad ogni forma di didattica efficace.

π Principi fondamentali

- coinvolgere le preconoscenze dell'allievo,
- mostrare con chiarezza dove si vuole arrivare,
- saper mettere in risalto le informazioni essenziali,
- scomporre il percorso in piccoli passi se necessario,
- fare verifiche continue con feed-back immediati,
- attivare strategie metacognitive per accompagnare il processo di apprendimento.

INDICATORI DELL'ATTIVITA' : DEFINIZIONI E TEMPO SUGGERITO

Indicatori dell'attività	Descrizione dell'azione	Tempo suggerito (stima)
Indicazione degli obiettivi da raggiungere	Elenco o schema: "Alla fine dovremo arrivare tutti a conoscere/saper risolvere…	Circa 5 minuti
Attivazione preconoscenze o definizione prerequisiti	Domande del tipo: "Vi ricordate che cosa significa…? Come si stabilisce se…?	Circa 5 minuti
Verifica compiti precedenti	Valutazione in ingresso; tipicamente nella forma di qualche domanda aperta o a risposta multipla scritta, con verifica collettiva immediata	Circa 10 minuti
Lezione espositiva (presenza, lineare o interattiva)	Esposizione di un nuovo argomento, eventualmente arricchita da supporti visivi o strumentali	Max 15 minuti
Dimostrazione (presenza, lineare o interattiva)	Spiegazione scomposta in momenti, intervallati eventualmente da ripetizione da parte degli studenti	Max 15 minuti
Consegne di lavoro	Indicazioni alla classe sulle cose da fare	Circa 5-10 minuti
Svolgimento di esercizio (individuale o collaborativo, in presenza)	"Provate a risolvere questo problema…" " Fate questo gioco…"	Può oscillare, max 15 minuti
Valutazione formativa (feedback immediato)	Ha lo scopo di far comprendere all'allievo che cosa deve migliorare per arrivare all'obiettivo. Sono opportuni feedback collettivi rapidi e frequenti.	Di norma 5 minuti, ripetuti anche più di una volta all'interno di una lezione
Discussione (aperta o guidata)	L'insegnante pone un quesito per attivare ipotesi e riflessioni	Max 10 minuti
Transfert di conoscenze	Invito a riflessioni o compiti che chiedono di applicare le conoscenze acquisite in altri contesti: "Adesso che abbiamo imparato questo, proviamo a chiederci…"	Variabile (consigliabile 10-15 minuti)

Mappa mentale, mappa concettuale	Mappa mentale: grafico a forma radiale che consente di rappresentare gli spunti che emergono via via in libertà Mappa concettuale: grafico razionalmente organizzato con nodi e relazioni disposte gerarchicamente dall'alto verso il basso: i nodi, inseriti in rettangoli, rappresentano i concetti espressi con sostantivi; le relazioni mostrate con frecce o linee, sono spiegate con verbi.	Max 10 minuti
Ripasso	Può assumere la forma di una serie di domande, di uno schema o lista fatti alla lavagna: "Risistemiamo le cose più importanti che sappiamo…"	Max 10-15 minuti
Sintesi di lezione e metacognizione	Conclusione al termine della lezione. "Dunque proviamo a ricapitolare le cose più importanti che abbiamo affrontato oggi…Che cosa ci ricorderemo di quanto abbiamo imparato?"	Circa 5 minuti
Valutazione sommativa	Prove finali di verifica di fine modulo	Max 30-50 minuti
Uso di attrezzature specifiche	Esperienze in aule attrezzate. E' opportuno indicare anche ipotesi, modalità di lavoro, strumenti e tempistica	variabile

7) Sintesi

1) Indicazione degli obiettivi

2) Attivazione preconoscenze

6) Feedback

5) Svolgimento esercizio

4) Consegne di lavoro

3) Lezione

OBIETTIVI
Definiti
esplicitamente
Operazionalizzati

VERIFICHE
Coerenti
Preparate da…
Applicate da…
Soglia di valutazione

Progetto
Didattico

ATTIVITA'
DIDATTICHE
Definite in anticipo
Cadenzate

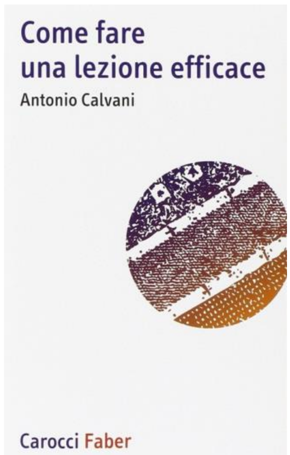
Conclusioni

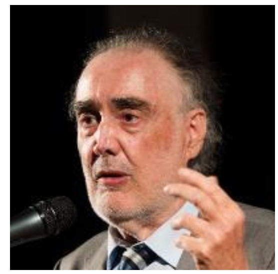
In sintesi sono da considerare del tutto ingenue le ricorrenti ondate volte ad "abolire la lezione frontale"; si dovrebbe invece lavorare per trasformare la didattica in classe in

- lezione interattiva,
- consapevolmente regolata,
- verso obiettivi di apprendimento chiaramente definiti
- controllabili dagli stessi alunni che apprendono.

Come fare una lezione efficace

Carocci Faber 2014





Antonio Calvani

Per approfondimenti

- D.P. Ausubel *Educazione e processi cognitivi* Franco Angeli Milano (1968)
- B.S. Bloom, J.T. Hasting, G.F. Madaus *Handbook on formative and summative evaluation of student learning* McGraw Hill, New York (1971)
- G. Bonaiuti *Le strategie didattiche* Carocci Roma (2014)
- A. Calvani *Come fare una lezione efficace* Carocci Roma (2014)
- A. Calvani, L. Menichetti *Come fare un progetto didattico* Carocci Roma (2015)
- G. Domenici *Le prove strutturate di conoscenza* Giunti – Lisciani, Teramo (1992)
- J. Hattie *Visible Learning for teachers maximizing impact on learning* Routledge London (2012)
- J. Hattie *Apprendimento visibile, insegnamento efficace* ed. italiana a cura di G. Vivanet Trento, Erickson (2016)
- R. Mager *Gli obiettivi didattici* EIT Teramo (1972)