UNIVERSITÀ DEL PIEMONTE ORIENTALE

Macchine matematiche:
ricerche e esempi di attività didattiche

Francesca Martignone

francesca.martignone@uniupo.it

2020

LE MACCHINE

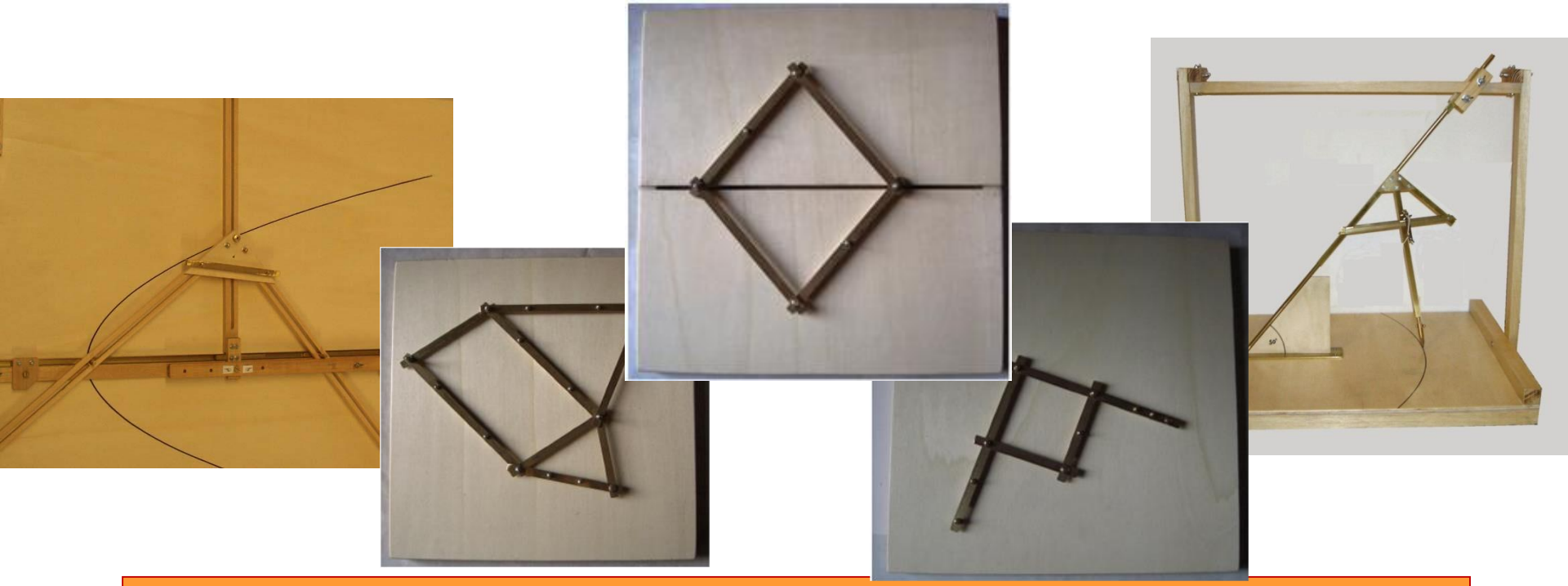
Macchine per l'aritmetica

Semplici calcolatrici meccaniche (Pascalina)

Macchine per la geometria

- Il compasso
- Curvigrafi
- Pantografi per le trasformazioni geometriche del piano
- ….

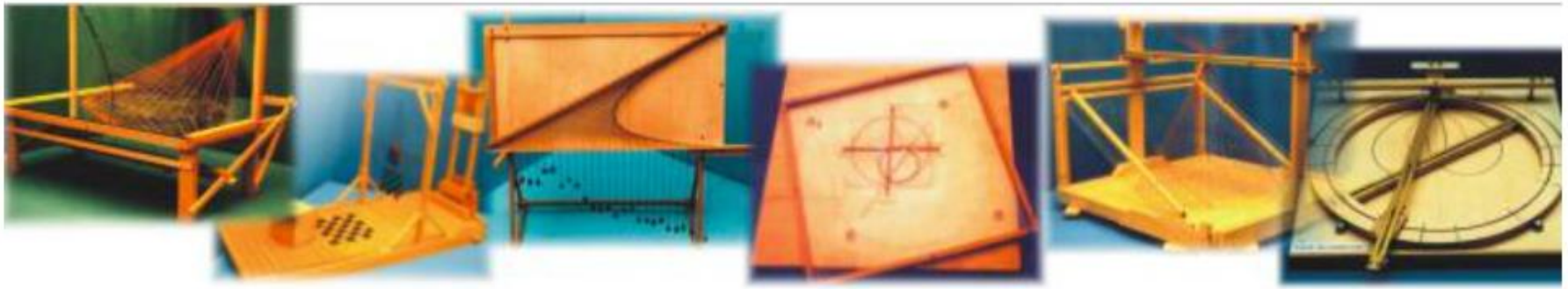
Macchine geometriche



Ricostruzioni di macchine storiche

Associazione Macchine Matematiche

http://www.macchinematematiche.org/



La collezione di Macchine Matematiche del Museo Universitario

Marcello Pergola

Laboratorio delle Macchine Matematiche

Università degli Studi di Modena e Reggio Emilia

Ateneo fondato nel 1175

www.mmlab.unimore.it

Associazione Macchine Matematiche

www.macchinematematiche.org

2020

Un po’ di storia dei laboratori delle macchine

Inizio anni ’80

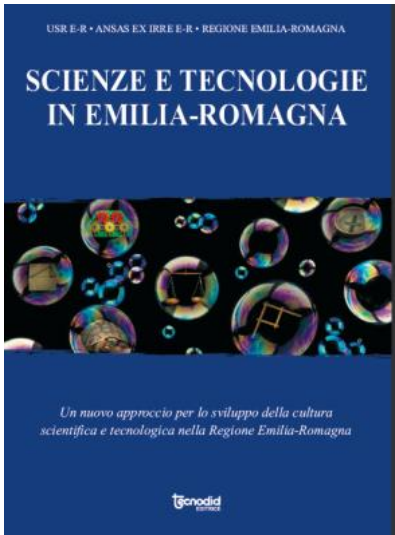
- Un gruppo di insegnanti di matematica del Liceo scientifico di Modena inizia a costruire le macchine per utilizzarle nella loro pratica didattica

2003- ad oggi

- MMLab presso il Dipartimento di Matematica di Modena – visite al laboratorio
- Associazione Macchine Matematiche

2008-2012

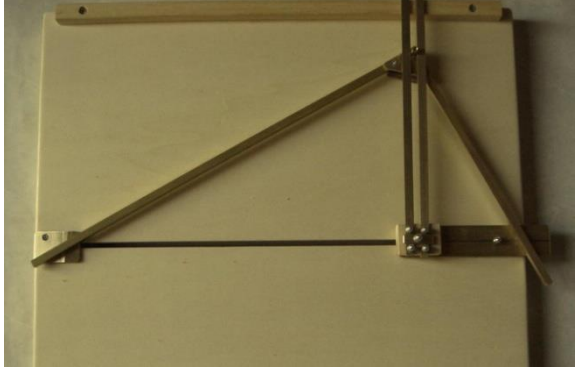
- Progetto regionale MMLab-ER (costituzione di una rete di laboratori e di insegnanti di tutte le province dell’Emilia Romagna)

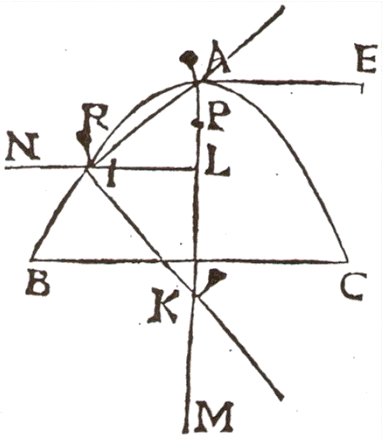


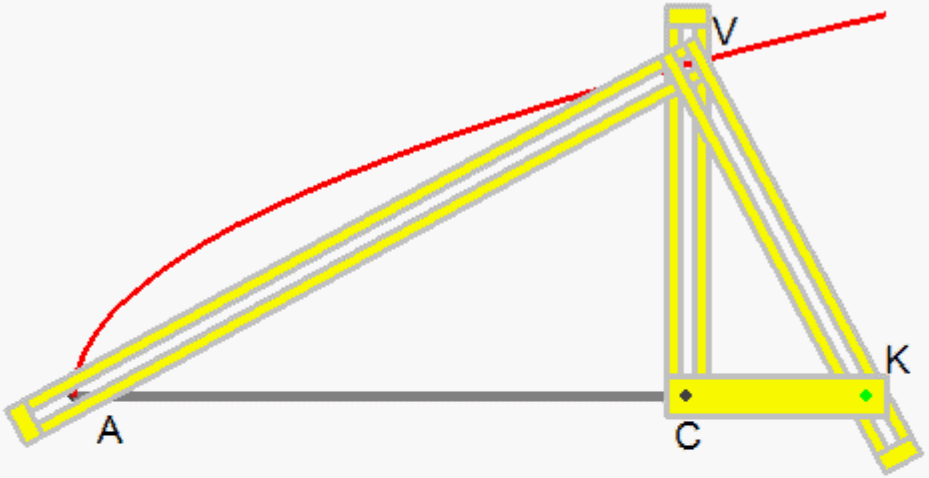
I sistemi articolati nella storia

I sistemi articolati più antichi risalgono all'epoca alessandrina e alla cultura araba, ma è nel '600, con la Géométrie di Descartes, che questi acquistano importanza teorica centrale.

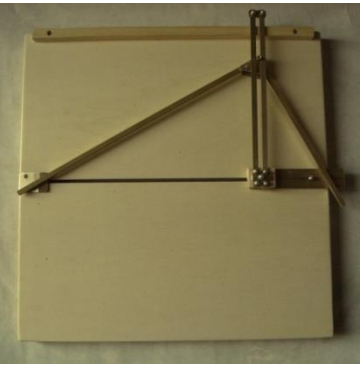
Un esempio di curvigrafo:
il parabolografo del Cavalieri





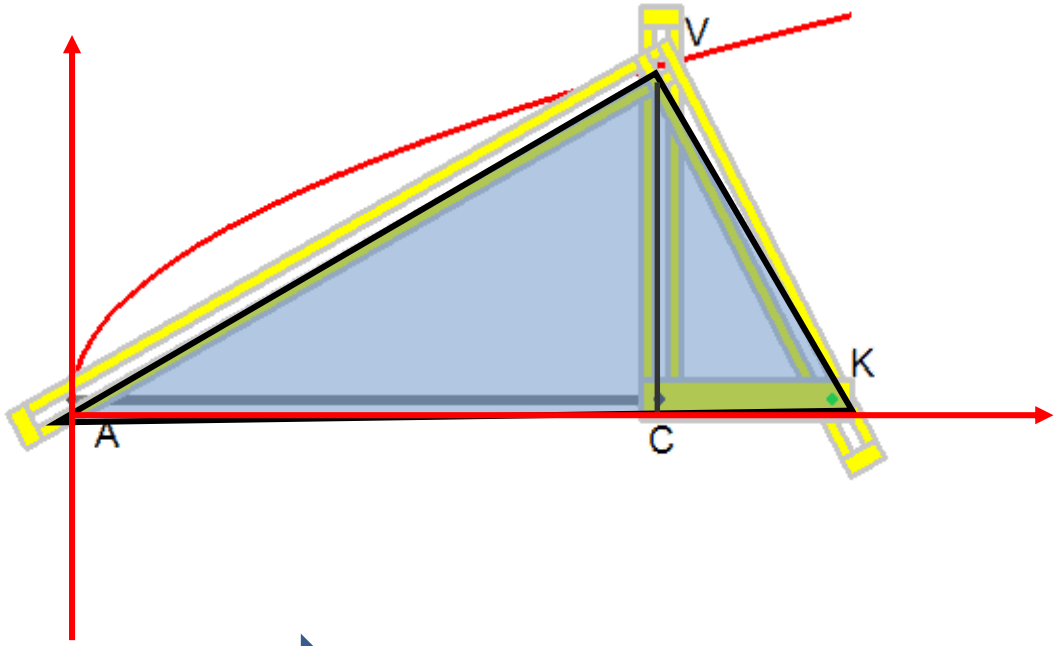


Durante il movimento continuo del meccanismo si possono individuare vincoli, figure che si deformano, parti che non si modificano o che mantengono la stessa forma e relazioni tra le parti.



Relazione tra segmenti

$$VC^2 = AC \cdot CK$$

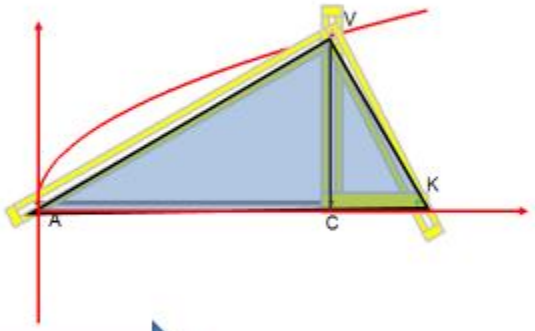


Se scegliamo un sistema di riferimento cartesiano

$$y^2 = k \cdot x$$

Relazione tra segmenti

$VC^2 = AC \cdot CK$



Se scegliamo un sistema di riferimento cartesiano

$y^2 = k \cdot x$

Si utilizza la geometria euclidea per individuare, analizzare, giustificare gli invarianti durante il moto continuo delle parti che compongono il sistema articolato.

Le figure geometriche elementari sono viste come «parti» di meccanismi da modificare, collegare ed assemblare.

Approfondimenti

Associazione Macchine Matematiche

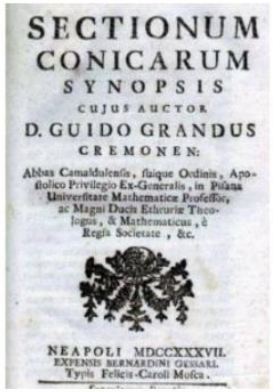
MENU PRINCIPALE

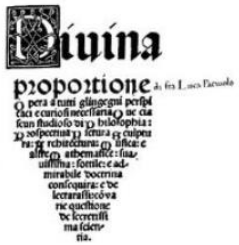
- Home
- Chi siamo
- Dove siamo
- Per contattarci
- Macchine nel mondo
- Web link
- Laboratorio Macchine Matematiche

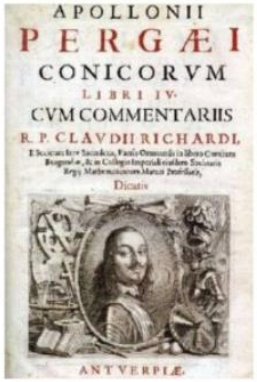
VISITE IN LABORATORIO

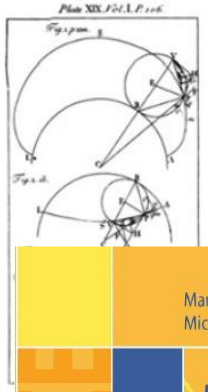
- Informazioni generali

Fonti storiche per la matematica



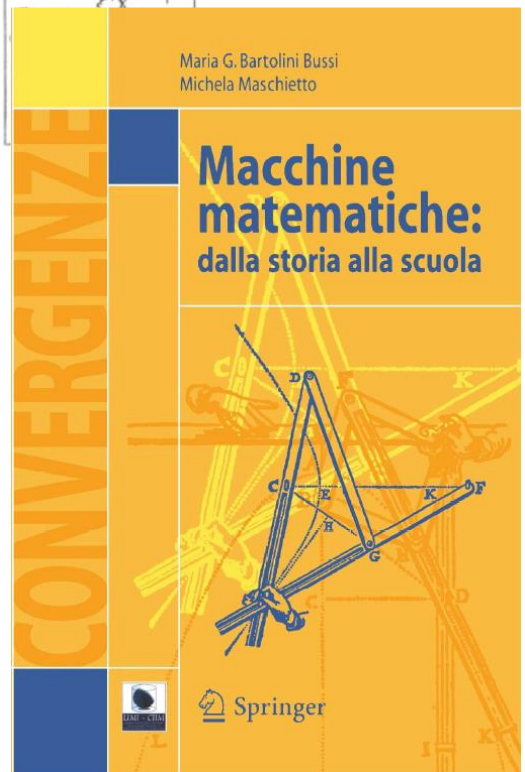


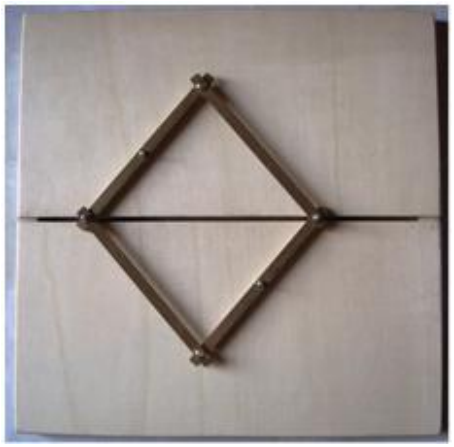




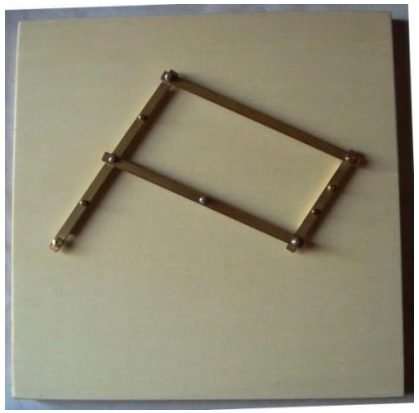
http://www.macchinematematiche.org/index.php?option=com_content&view=article&id=58&Itemid=160&lang=it

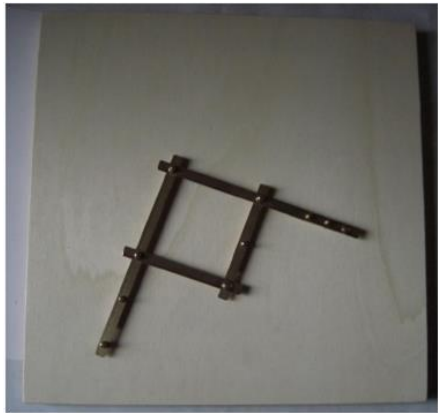
http://www.indire.it/scuola-uguale-futuro/materiali/Macchine+matematiche.pdf

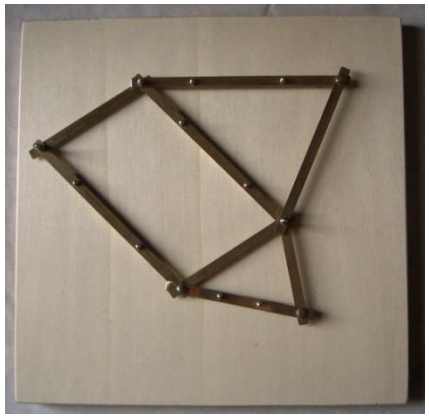


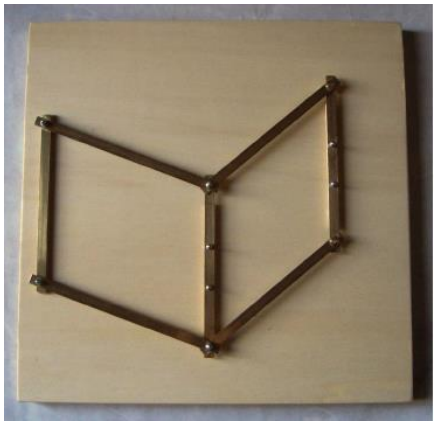


Pantografi per le trasformazioni geometriche del piano







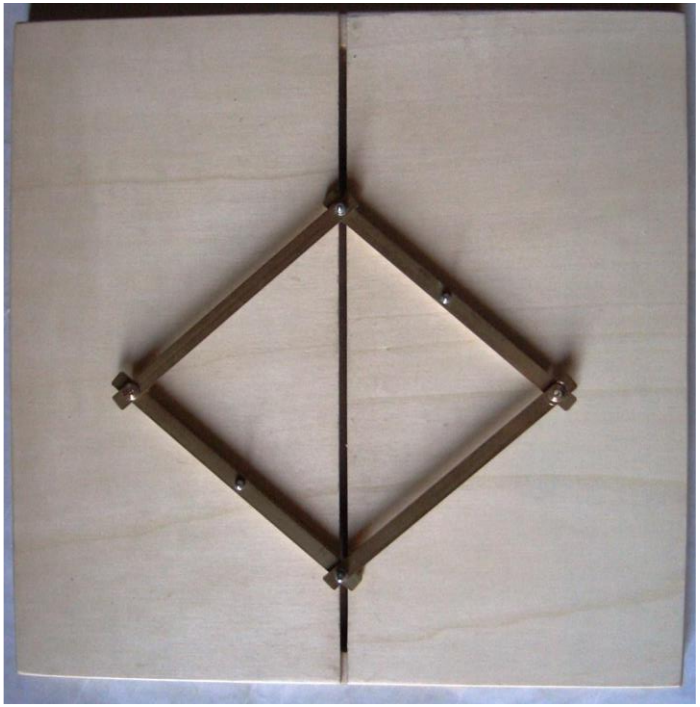


I sistemi articolati nella storia

Nell'800 si forma e diventa fondamentale la teoria delle trasformazioni geometriche.

"***Ogni epoca tiene, per così dire, tra le mani – ma senza averne coscienza – le invenzioni di epoche future: la storia delle cose anticipa spesso quella delle idee***"
(Koenigs, 1897)

Sistemi articolati/biellismi

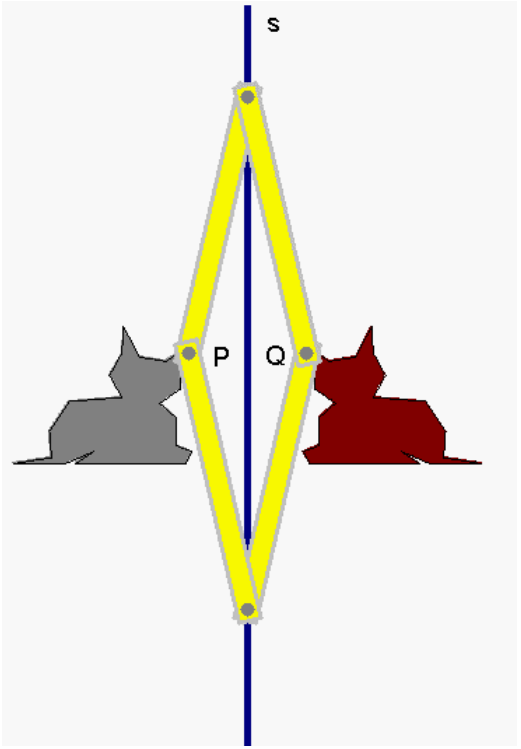


Riferimenti bibliografici

http://www.macchinematematiche.org/cataoghi/theatrum/macchine/118bib.htm

Pantografi

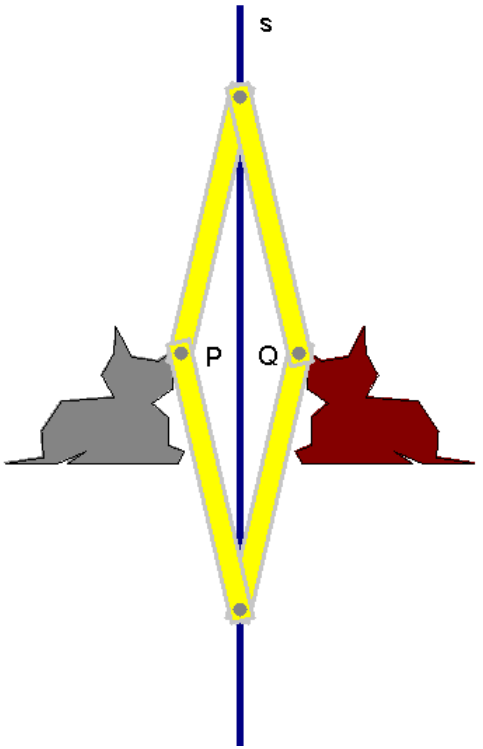
Meccanismo che stabilisce una **corrispondenza locale** tra i punti di due **regioni piane** limitate collegandole fisicamente, e che incorpora le proprietà che caratterizzano la trasformazione geometrica del piano.



Nei pantografi vi sono due punti che hanno due gradi di libertà: **puntatore e tracciatore**.

Pantografi

Nei pantografi **il movimento e la traccia** permettono di mettere in luce la relazione (covarianza-dipendenza) tra i due punti "trasformati", ma anche la relazione tra le **figure prodotte** dalla macchina



Quali sono gli aspetti delle trasformazioni geometriche che sono incorporati nelle macchine?

I pantografi sono costruiti in modo tale da costringere due punti a seguire una legge matematica predeterminata.

Questi due punti **coesistono** nella struttura fisica della macchina e il loro movimento sul piano (vincolato dalla struttura della macchina) può generare infiniti punti che godono delle stesse proprietà

Aspetti interessanti da considerare

- La macchina incorpora la relazione tra P e f(P) che sono CONTEMPORANEAMENTE presenti sempre!
- E' il movimento che genera "infiniti" punti e quindi linee e figure
- Il movimento e la traccia permettono quindi di mettere in luce la relazione (covarianza e dipendenza) tra i due punti "trasformati", ma anche la relazione tra le figure complete finali

In un’ottica didattica…

Le **trasformazioni geometriche del piano** sono un argomento trattato a diversi livelli e con diversi approcci dalla scuola primaria a quella secondaria.

Funzioni

Come possiamo definire o anche solo descrivere una trasformazione geometrica del piano?

Una trasformazione geometrica del piano è una **funzione** e quindi può essere descritta e analizzata

- Come oggetto: un elemento di un gruppo…
- Come una relazione: tra punti e tra figure…
- Come una covariazione…
- Come una procedura…

Legge matematica ⟺ **invarianti della macchina**

In un'ottica didattica…

Le attività laboratoriali con le macchine matematiche

(strutturate da opportune consegne)

si sono dimostrate un ambiente favorevole per sviluppare (e osservare) processi esplorativi e argomentativi

Qual è la matematica in gioco?

- Le trasformazioni geometriche del piano
- La geometria euclidea
- La geometria analitica

Quali processi?

- Esplorazione, produzione di congetture, argomentazioni e costruzioni di dimostrazioni
- Attività di problem solving (cosa succederebbe se ….)

Esplorazione delle macchine

Nei pantografi i puntatori/tracciatori hanno **due gradi di libertà** e quindi la manipolazione di questi offre la possibilità di osservare diverse strategie esplorative, una maggiore ricchezza di esempi di **schemi di utilizzo** e di **prodotti** rispetto a macchine (come i curvigrafi) dove i tracciatori hanno un solo grado di libertà.

Una possibile lente teorica per analizzare i processi cognitivi che si sviluppano nell'interazione soggetto-strumento durante l'esplorazione dei pantografi

Studi di ergonomia cognitiva condotti da Rabardel

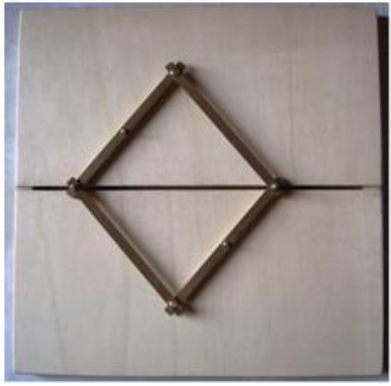
Artefatto→Strumento

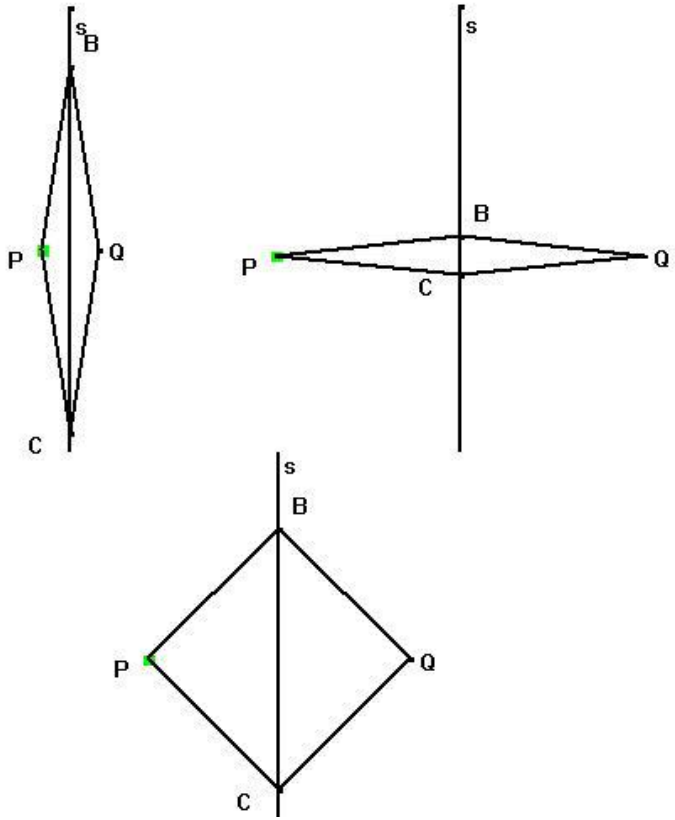
1. **Come è fatta?** — **ESPLORAZIONI**
2. **Cosa fa?** — **CONGETTURE**, **ARGOMENTAZIONI**
3. **Perché lo fa?** — **DIMOSTRAZIONI**
4. **Cosa succederebbe se …?** — **CONDIZIONALITA'**, **PROBLEM POSING E PROBLEM SOLVING**

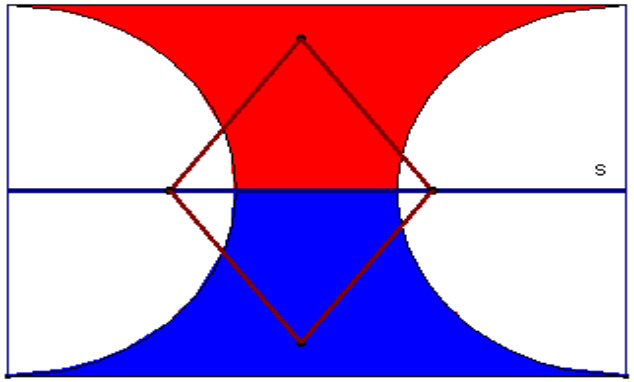
Dalla produzione di congetture allo sviluppo di argomentazioni che legano la struttura e gli schemi d'utilizzo della macchina con la matematica in essa "incorporata"

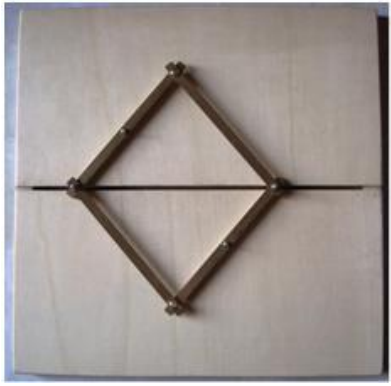
1. Come è fatta la macchina?

- Caratteristiche fisiche della macchina
- Movimenti possibili
- Come si usa



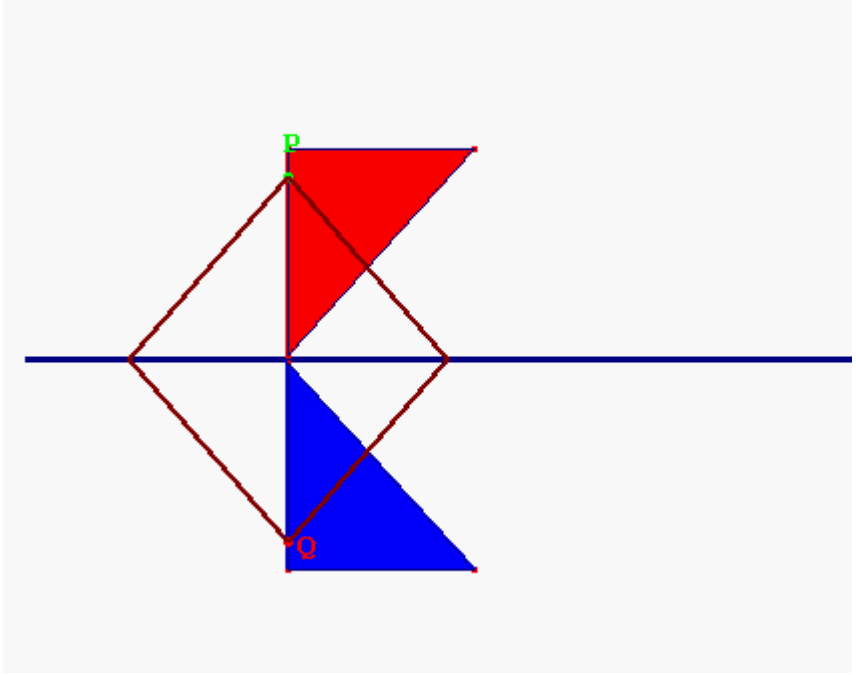




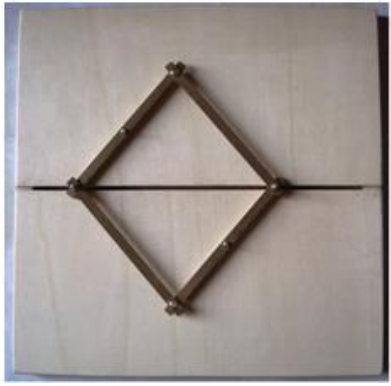


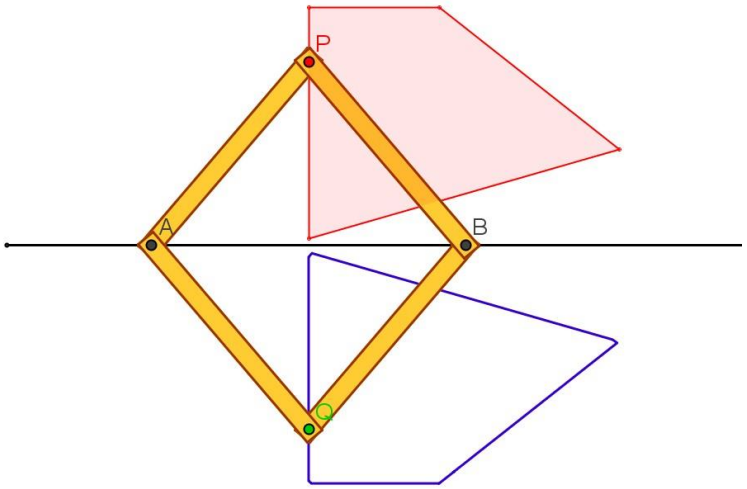
2. Cosa fa la macchina?

- Si può usare per disegnare figure secondo una trasformazione…
- Le figure disegnate sono…



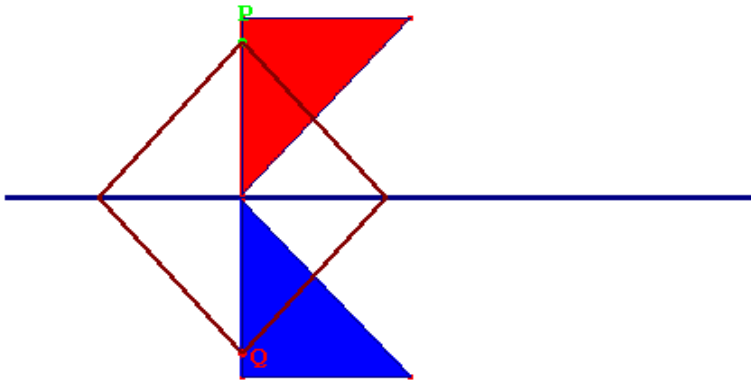
3. Perché lo fa?

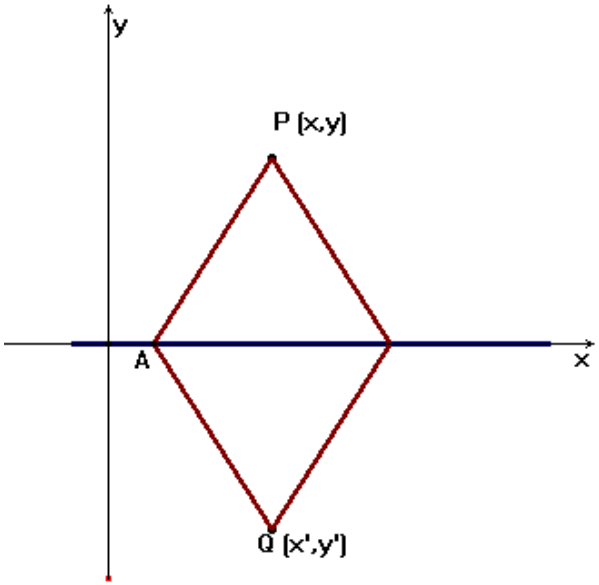




Proprietà geometriche
della figura formata dalle aste
e **modo in cui è incernierata al piano**

Simmetria assiale





Equazioni:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$

Fin dalla scuola primaria…

ATTIVITÀ LABORATORIALI

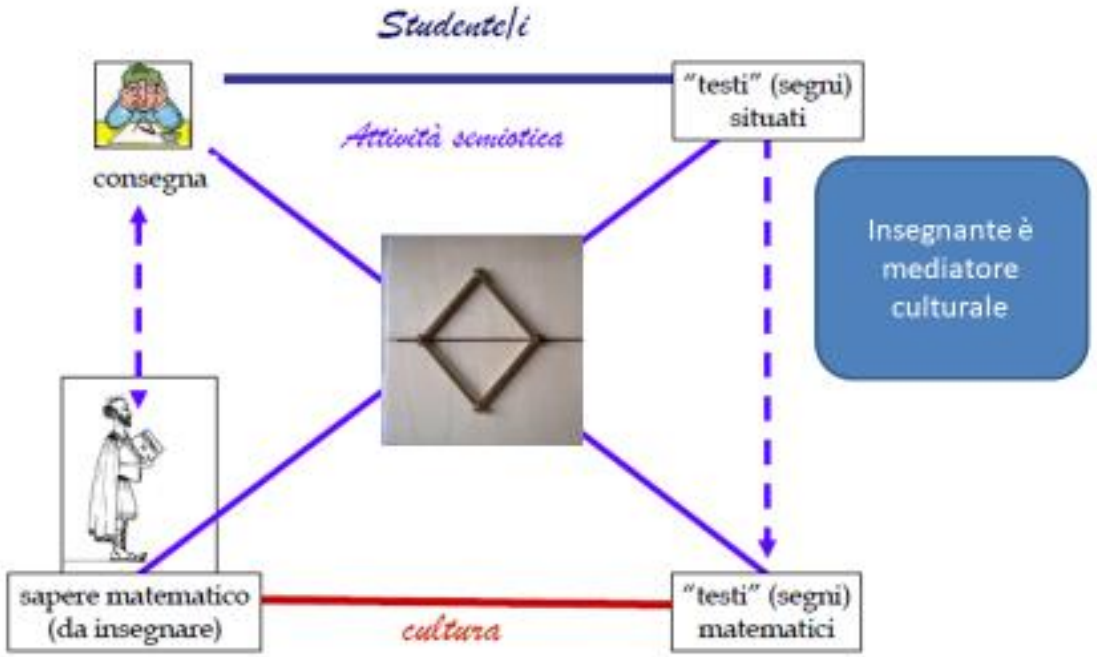
Ambiente favorevole per sviluppare (e osservare) processi esplorativi e argomentativi

2020

Mediazione semiotica

(Bartolini Bussi & Mariotti, 2008)

Quadro teorico della ***mediazione semiotica*** modellizza le fasi di progettazione e sviluppo di attività laboratoriali che si avvalgono dell'uso di strumenti



XXVII Seminario Nazionale in Didattica della Matematica

https://www.airdm.org/xxvii-seminario-nazionale-in-didattica-della-matematica/

Ottica Vygotskiana

Strumento di mediazione semiotica:

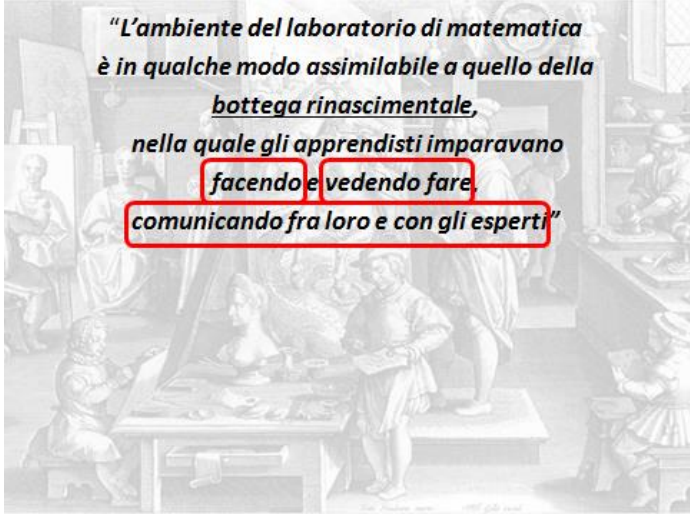
uno strumento può, nell'interazione sociale a scuola, mediare significati relativi ai saperi che vi sono potenzialmente incorporati.

Linguaggio verbale

Gesti

Artefatti

Idea di Laboratorio di matematica



Il Laboratorio di Matematica si presenta come una serie di **indicazioni metodologiche trasversali**, basate certamente sull'uso di **strumenti**, tecnologici e non, ma principalmente finalizzate alla costruzione di **significati matematici**.

Matematica 2003
Curriculi UMI

https://umi.dm.unibo.it/materiali-umi-ciim/trasversali/riflessioni-sul-laboratorio-di-matematica/

Il laboratorio nelle Indicazioni Nazionali

Nelle Indicazioni Nazionali per il primo ciclo d'istruzione:

> *In matematica, come nelle altre discipline scientifiche, è elemento fondamentale il laboratorio, inteso sia come luogo fisico sia come momento in cui l'alunno è attivo, formula le proprie ipotesi e ne controlla le conseguenze, progetta e sperimenta, discute e argomenta le proprie scelte, impara a raccogliere dati, negozia e costruisce significati, porta a conclusioni temporanee e a nuove aperture la costruzione delle conoscenze personali e collettive.* (p.49)

Dalle Indicazioni Nazionali per i Licei:

> "L'uso costante del laboratorio per l'insegnamento delle discipline scientifiche; la pratica dell'argomentazione e del confronto; la cura di una modalità espositiva scritta ed orale corretta, pertinente, efficace e personale" (p.7)

Indicazioni Nazionali e nuovi scenari (2018)

La matematica, tuttavia, permette anche di sviluppare competenze trasversali importanti attraverso attività che valorizzano i processi tipici della disciplina:

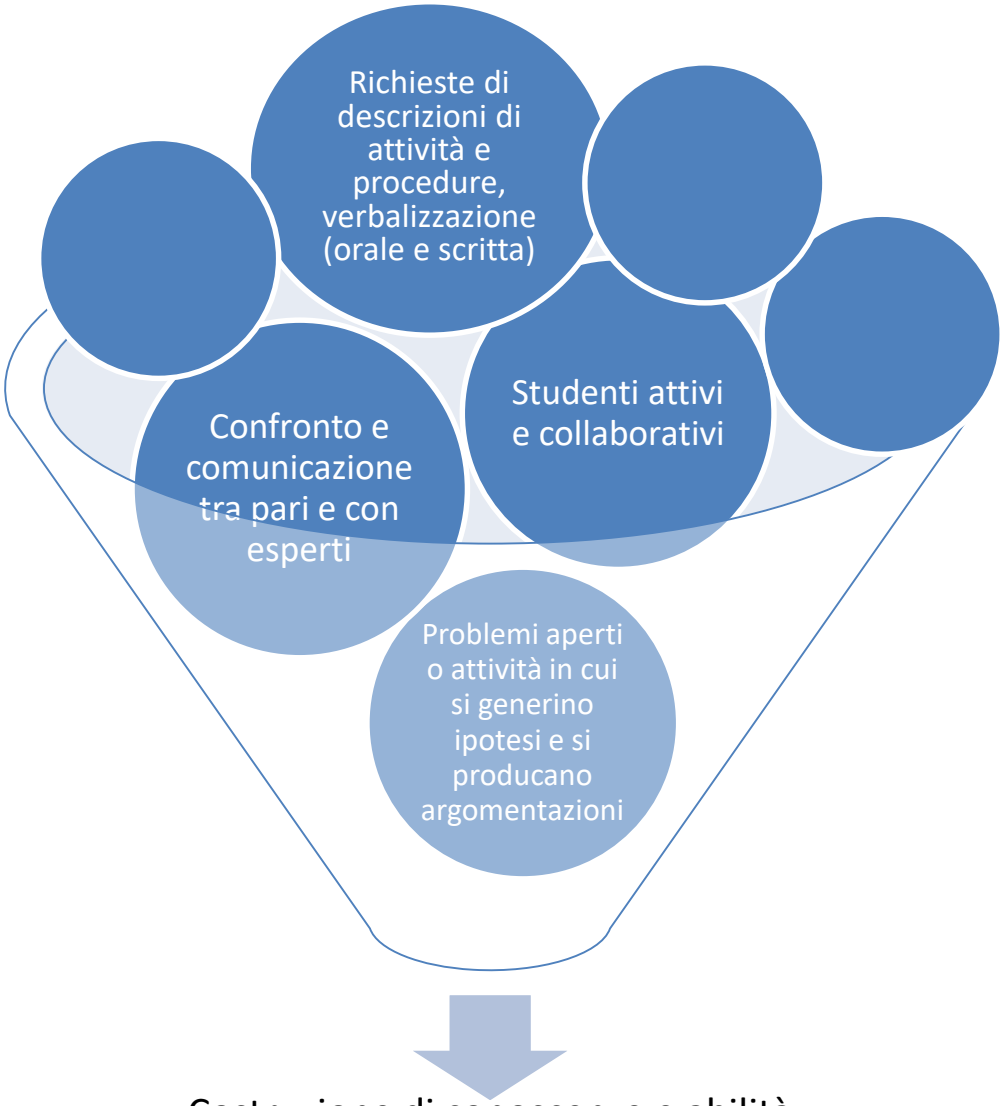
"In particolare, la matematica (…) contribuisce a sviluppare la capacità di comunicare e discutere, di argomentare in modo corretto, di comprendere i punti di vista e le argomentazioni degli altri."

Tali competenze sono rilevanti per la formazione di una cittadinanza attiva e consapevole, in cui ogni persona è disponibile all'ascolto attento e critico dell'altro e a un confronto basato sul riferimento ad argomenti pertinenti e rilevanti. In particolare l'educazione all'argomentazione può costituire un antidoto contro il proliferare d'informazioni false o incontrollate.

Il laboratorio di matematica rappresenta un contesto naturale per stimolare le capacità di argomentare e stimolare il confronto fra pari

www.miur.gov.it/documents/20182/0/Indicazioni+nazionali+e+nuovi+scenari/3234ab16-1f1d-4f34-99a3-319d892a40f2

Quali sono gli ingredienti di un laboratorio?



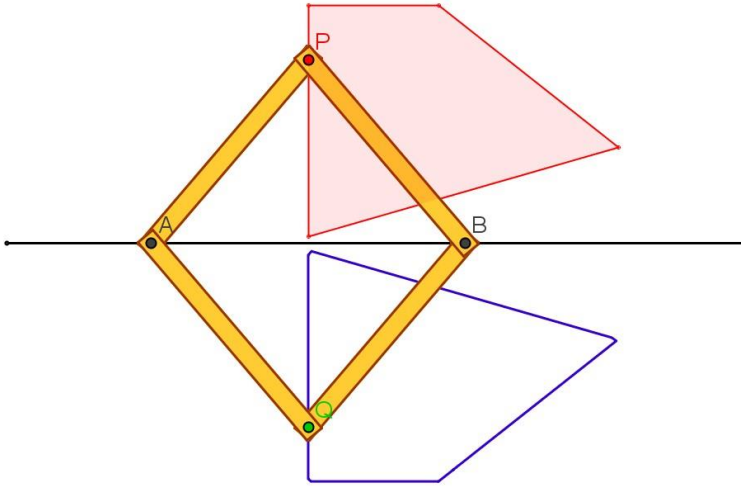
Costruzione di conoscenze e abilità personali e collettive

Costruzione sociale del sapere

- Attività in piccoli **gruppi**
- **Discussioni** collettive
- Utilizzo di **artefatti**

Focus

- **Esplorazione delle macchine**
- **Genesi di congetture**, sviluppo di **argomentazioni** e costruzione di **dimostrazioni**
- **Confronto e verbalizzazione** (orale o scritta)



Laboratorio delle Macchine Matematiche
Università degli Studi di Modena e Reggio Emilia
Ateneo fondato nel 1175

Pantografo per la simmetria assiale

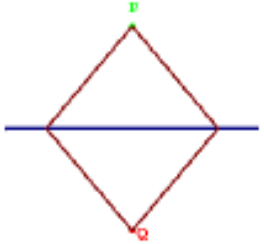
ESEMPI DI CONSEGNE

Attività in piccoli **gruppi**
Discussioni collettive
Utilizzo di **artefatti**

2020

Sistema articolato 1

Esplorazione della macchina come artefatto: come è fatta la macchina?



1. Descrivere la macchina (Quale figura geometrica formano le aste del sistema articolato? Quali possono essere i suoi movimenti? Come si comportano i diversi vertici di tale figura geometrica? Quanti gradi di libertà hanno? Giustificare le risposte)
2. Individuare e rappresentare graficamente le configurazioni limite del sistema articolato.

Esplorazione della macchina come strumento (Artefatto+Schemi d'uso): che cosa fa la macchina?

3. Nella figura abbiamo etichettato con le lettere P e Q due vertici del sistema articolato. Nella macchina in questi due vertici troviamo due fori in cui si possono inserire delle mine scriventi e per questo chiameremo questi due punti "tracciatori". Quali sono le regioni piane messe in corrispondenza dalla macchina? (ossia quali parti del piano sono raggiungibili dai tracciatori? Descrivere, anche attraverso disegni, tali regioni e giustificarne la forma in relazione alle caratteristiche della macchina)
4. Se uno dei due vertici tracciatori (P o Q) descrive una figura (segmenti, triangoli, circonferenze, etc.), quale figura corrispondente viene tracciata dall'altro vertice? Questa corrispondenza tra figure è riconducibile a qualche trasformazione geometrica del piano a voi nota? Se sì, quale e quali elementi vi hanno permesso di riconoscerla?

Analisi delle proprietà della trasformazione incorporate nella macchina: perché lo fa?

5. Quali caratteristiche della macchina permettono la "realizzazione" della trasformazione geometrica del piano? (giustificare accuratamente la risposta)
6. Individuare gli invarianti della trasformazione analizzando i disegni prodotti e i movimenti della macchina (proprietà geometriche delle figure, elementi uniti, verso di percorrenza delle figure, etc.)

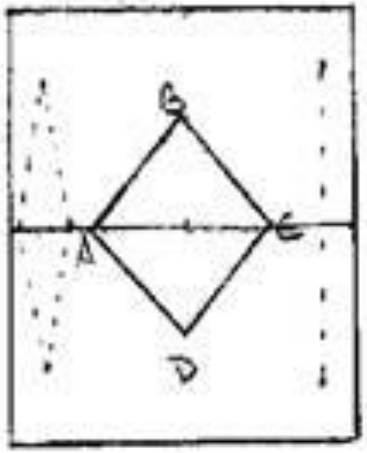
Ulteriori attività:

Introduzione del piano cartesiano

7. Scegliere un opportuno riferimento cartesiano ortogonale sul piano della macchina e scrivere le equazioni della trasformazione svolta dalla macchina.

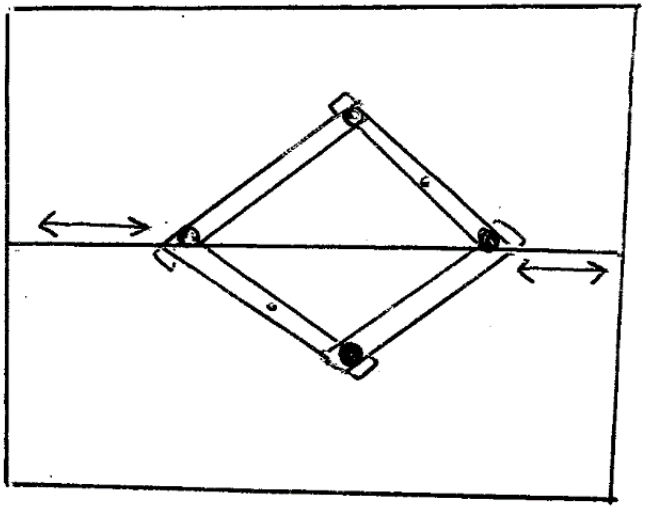
Artefatto

1. Descrivere la macchina (Da quante aste è formato il sistema articolato? Quale figura geometrica formano tali aste? Ci sono altri elementi?) e disegnarla (assegnando dei nomi ai vertici della figura).



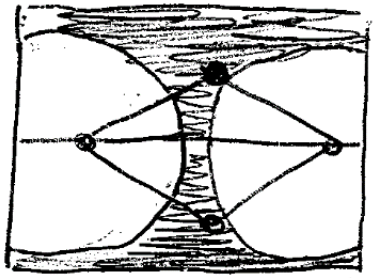
la macchina è un quadrato di legno con delle aste mobili lunghe 16 cm. Essendo mobili, tali aste formano dei rombi, un quadrato e 2 segmenti

1. Descrivere la macchina (Da quante aste è formato il sistema articolato? Quale figura geometrica formano tali aste? Ci sono altri elementi?) e disegnarla (assegnando dei nomi ai vertici della figura).



LA MACCHINA È FORMATA DA UN PIANO IN LEGNO DIVISO A METÀ DA UNA LINEA CAVA, SU CUI SCORRONO 2 VITI IN METALLO CHE TENGONO UNITE 4 STRISCE DI METALLO LUNGHE 16 cm CIRCA,
A LORO VOLTA LE 4 STRISCE SONO UNITE AD ALTRE 2 STRISCE DI LEGNO ATTACCATE CON ALTRE 2 VITI,
QUESTE DUE PUNTE SI POSSONO MUOVERE SOLO IN UN CERTO SPAZIO.

↓

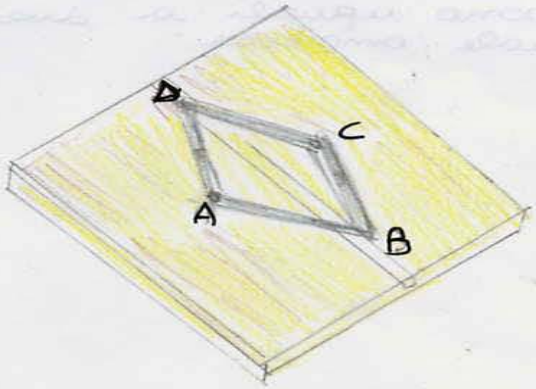


1. COM'E' FATTA LA MACCHINA

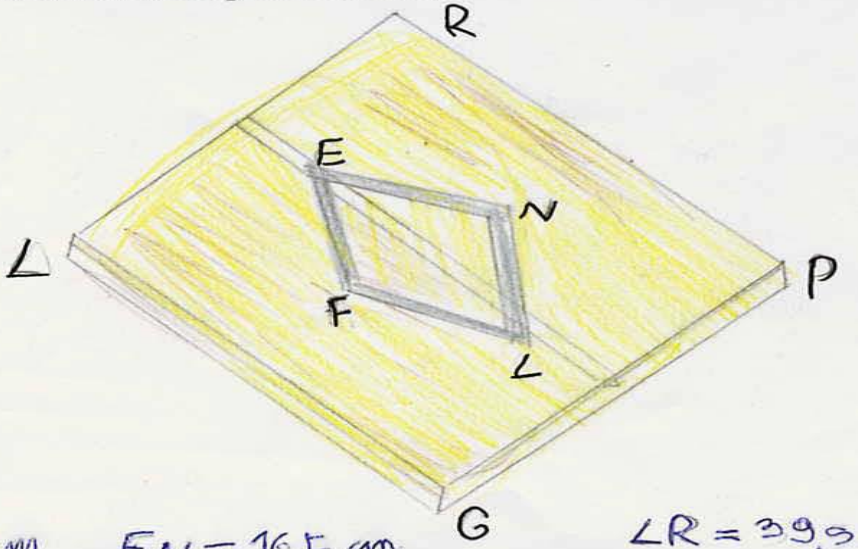
DESCRIZIONE E ANALISI DELLA MACCHINA

a. Esplora la macchina muovendo tutti i suoi componenti e disegna le parti da cui è composta (quante aste ci sono? Come si muovono?).

Il pantografo è formato da 4 aste di ferro. Il movimento delle aste va dal centro verso l'esterno e viceversa. È formato da 2 viti, 2 bulloni 4 rondelle per fissare tra loro le aste. Sotto a due aste si trovano due piccole assi di legno con sotto ciascuna 3 feltrini, per far scorrere la macchina. Inoltre c'è un tavolo di legno che sorregge la figura.



b. Assegna le lettere ai vertici della figura e misura i diversi componenti della macchina (per le aste misurare da perno a perno).

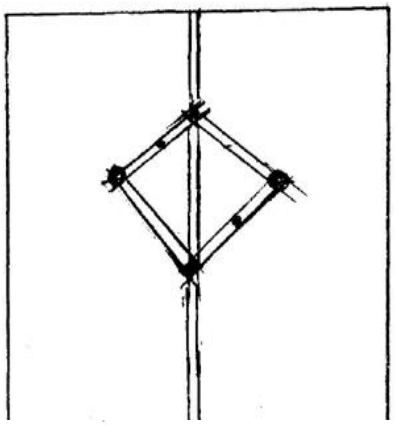


FL = 16,5 cm EN = 16,5 cm LR = 39,5 cm GP = 39,5 cm
FE = 16,5 cm LN = 16,5 cm RP = 38,5 cm LG = 39,5 cm

(Concu, 2010)

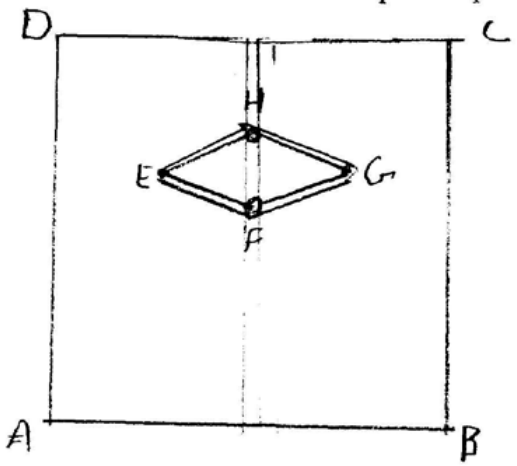
DESCRIZIONE E ANALISI DELLA MACCHINA

a. Esplora la macchina muovendo tutti i suoi componenti e disegna le parti da cui è composta (quante aste ci sono? Come si muovono?).



"La macchina è costituita da un pianale di legno quadrato diviso in due parti uguali da una scanalatura, e da 4 asticelle metalliche di uguale lunghezza incernierate da 4 perni due dei quali scorrono nella scanalatura mentre gli altri fungono da porta mine. Tutti e quattro permettono il movimento controllato delle astine."

b. Assegna le lettere ai vertici della figura e misura i diversi componenti della macchina (per le aste misurare da perno a perno).

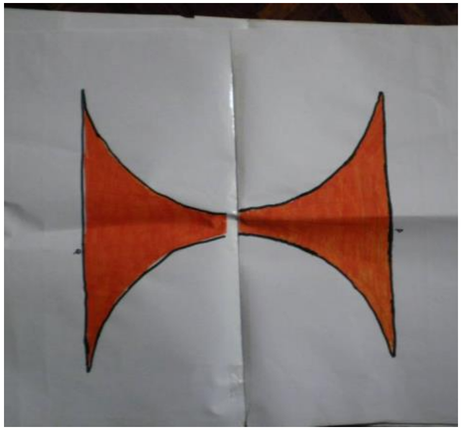


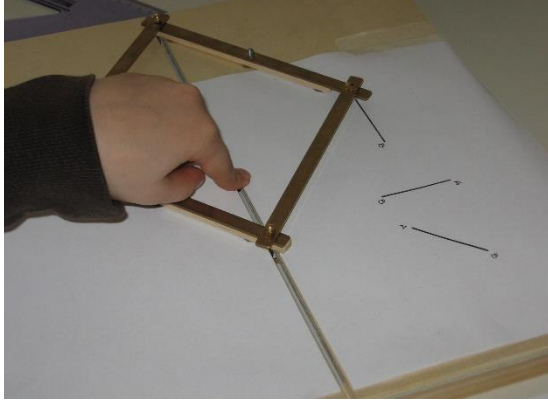
$\overline{AD} = \overline{DC} = \overline{CB} = \overline{BA} = 39,5$ cm

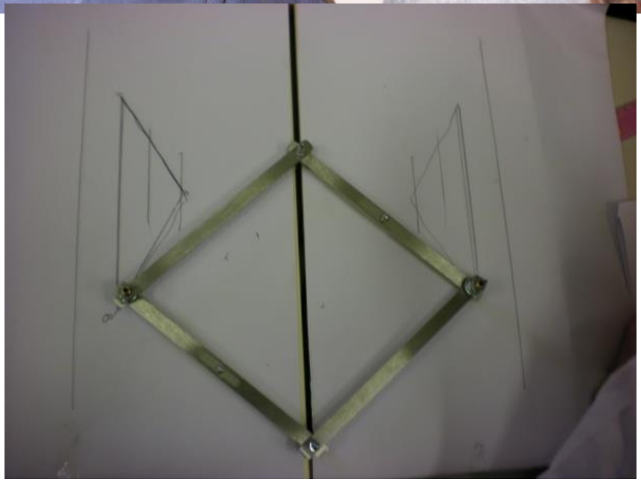
$\overline{EF} = \overline{FG} = \overline{GH} = \overline{HE} = 15,7$ cm

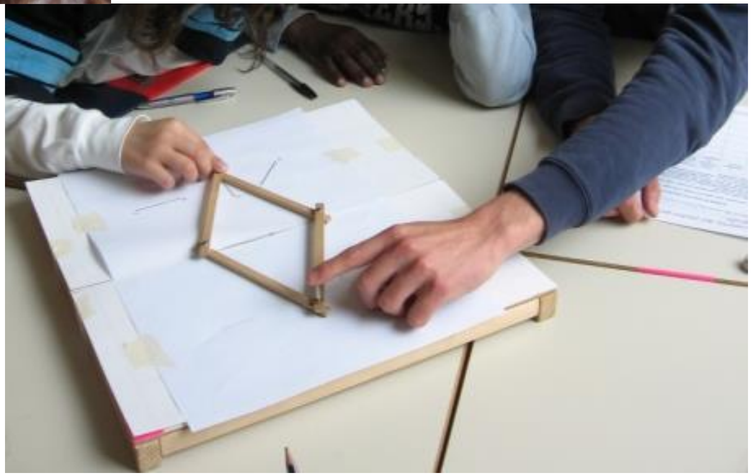
EFGH = ROMBO

(Concu, 2010)









Dopo aver usato la macchina per tracciare punti e figure corrispondenti (***macchina come strumento***) …

La macchina è in grado di disegnare figure
simmetriche a quelle date perché ognuna delle
due parti separate dalla scanalatura si muove
in senso opposto rispetto all' altro; ~~infatti~~ e
questo è possibile grazie al fatto che le diagonali ~~immagi~~
~~come~~ del rombo di asticelle* rimangono sempre perpen=
dicolari in qualunque posizione si movano le asticelle
~~delle quali è la scanalatura~~ *cioè la scanalatura
una linea immaginaria che unisce i due vertici
ottamina.

(Concu, 2010)

4. Girare i fogli sulla macchina con dei nuovi fogli bianchi. Dato un punto P disegnare il suo corrispondente Q con il tracciatore. Dopo aver disegnato il punto Q, togliete il sistema articolato dal piano della macchina.

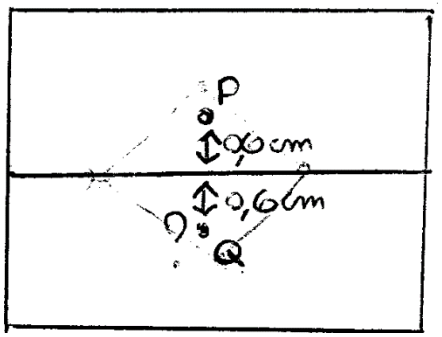
Scrivere come si può ottenere il punto Q partendo dal punto P senza usare la macchina, descrivendo con precisione in che relazione stanno i due punti rispetto rispetto alla scanalatura.

Trovato il punto P, tracciamo una perpendicolare r alla scanalatura passante per il punto P. Misuriamo la distanza tra il Punto F e la scanalatura, che poi riportiamo dall'altra parte trovando il punto Q.

4. Girare i fogli sulla macchina con dei nuovi fogli bianchi. Dato un punto P disegnare il suo corrispondente Q con il tracciatore. Dopo aver disegnato il punto Q, togliete il sistema articolato dal piano della macchina.

Scrivere come si può ottenere il punto Q partendo dal punto P senza usare la macchina, descrivendo con precisione in che relazione stanno i due punti rispetto rispetto alla scanalatura.

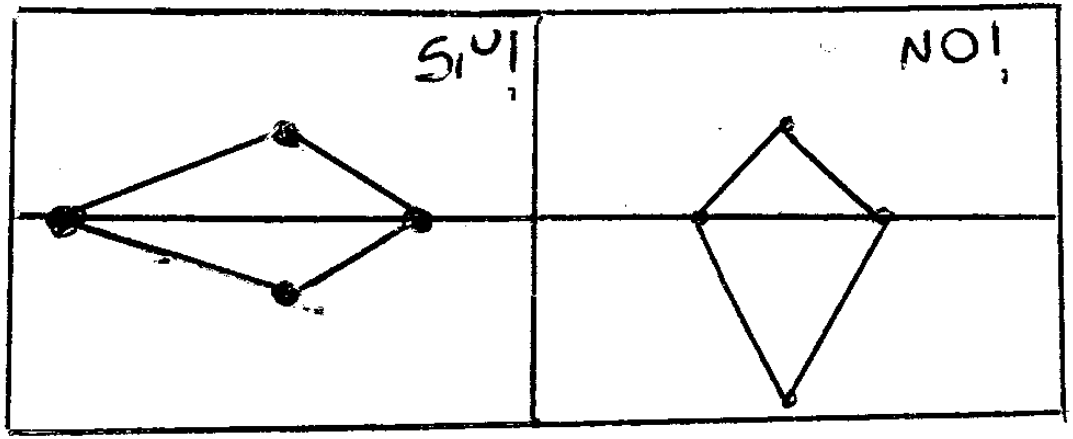
DISEGNO UN PUNTO (P) E CALCOLO LA DISTANZA DA (P) ALLA GUIDA.
E, NELLA STESSA DIREZIONE, NELL'ALTRO FOGLIO, CON LA STESSA LUNGHEZZA TROVO (Q)



Ulteriori consegne…

E’ possibile sostituire al rombo articolato una figura geometrica diversa che realizzi la medesima trasformazione?

IL GIUSTO E'

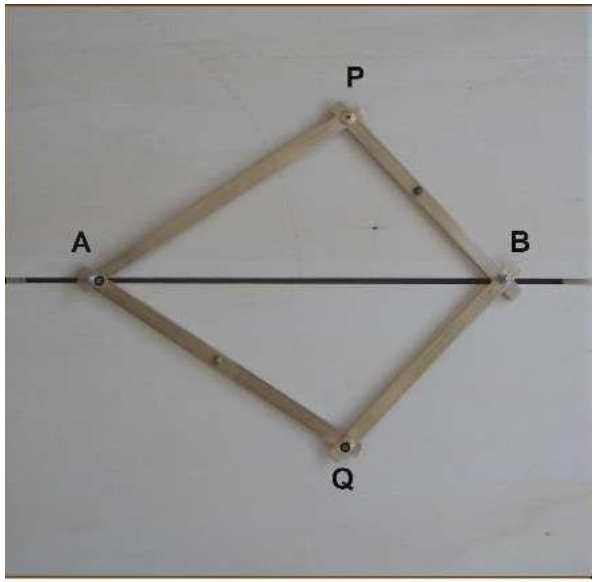


Variazioni del pantografo:
quadrilateri con i lati congruenti a due a due

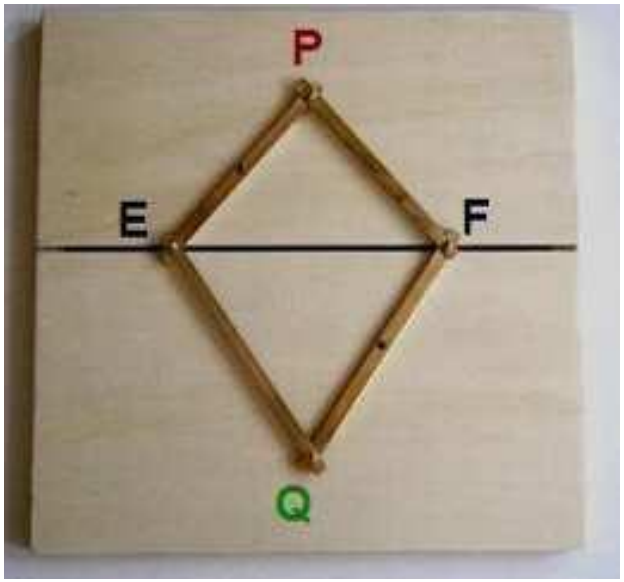
COSA SUCCEDEREBBE SE…
CAMBIASSIMO LA LUNGHEZZA DELLE ASTE?

Cosa succederebbe se… cambiassimo la lunghezza delle aste?

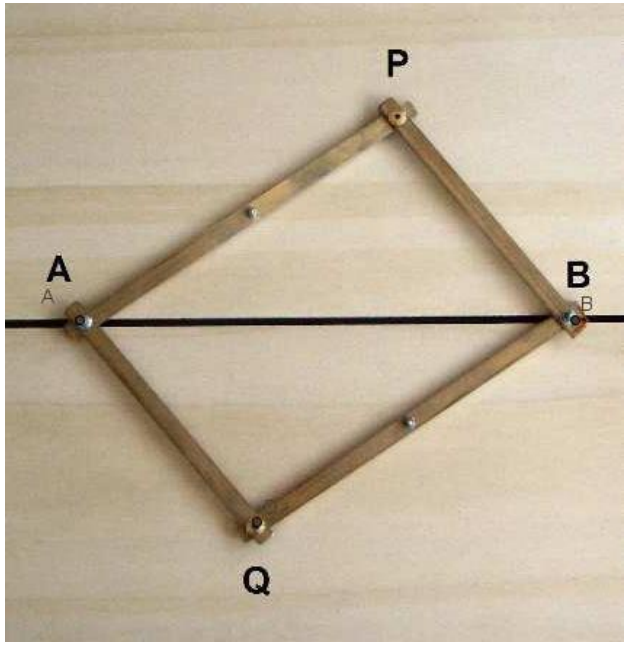
Variazioni del pantografo: quadrilateri con due lati congruenti



A

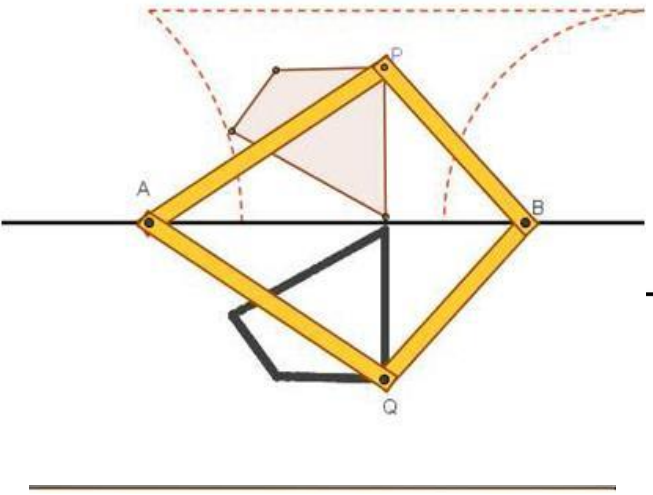


B

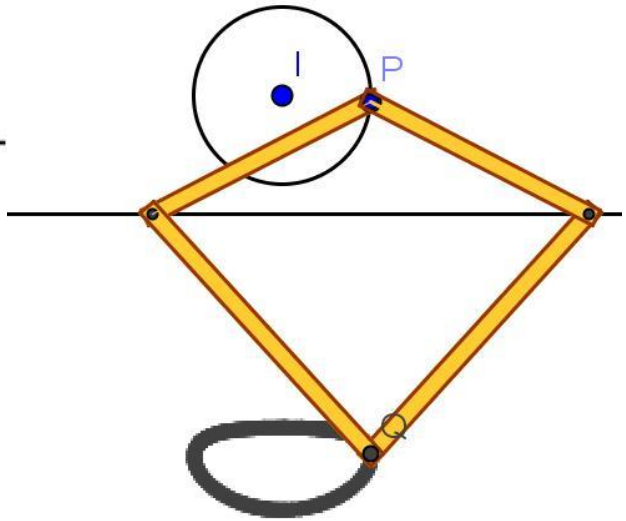


C

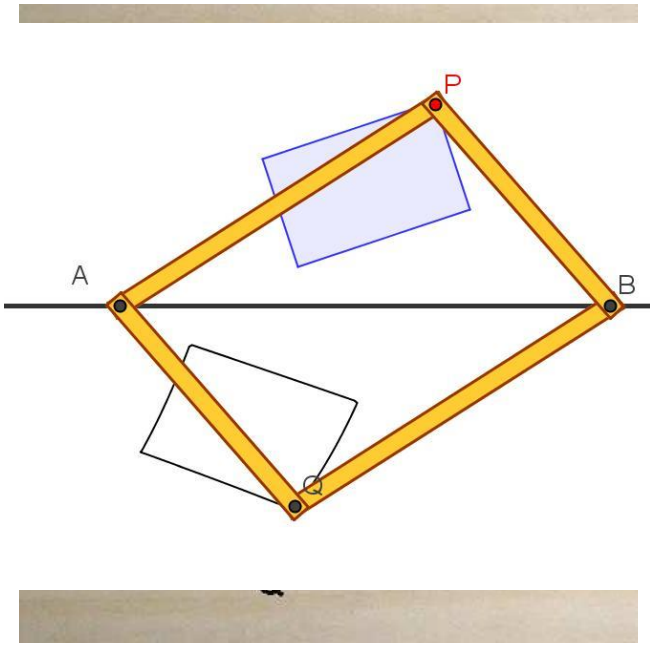
Cosa succederebbe se… cambiassimo la lunghezza delle aste?



A

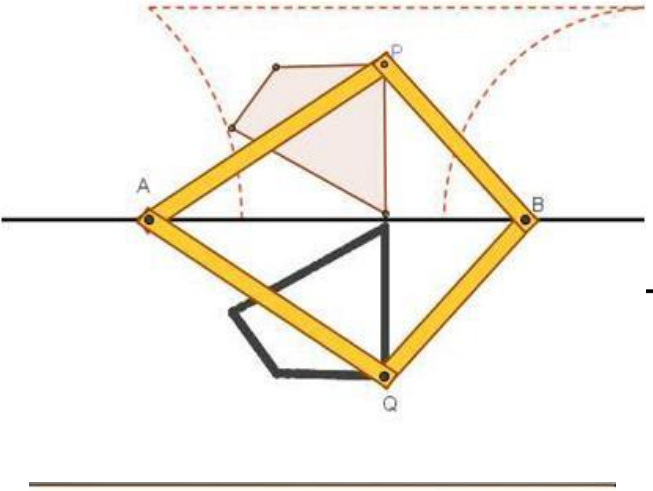


B

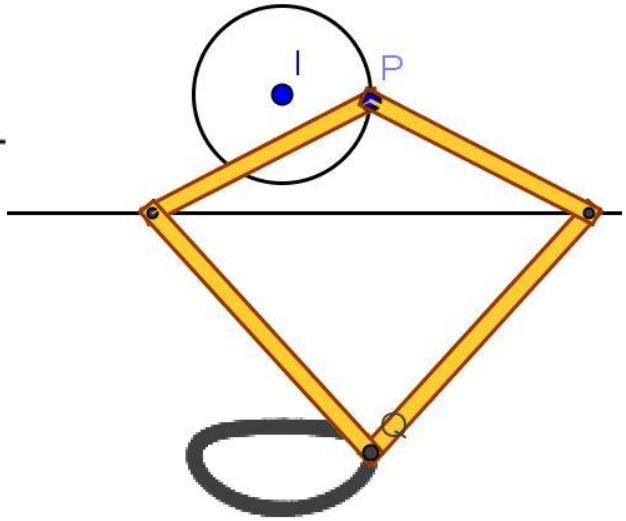


C

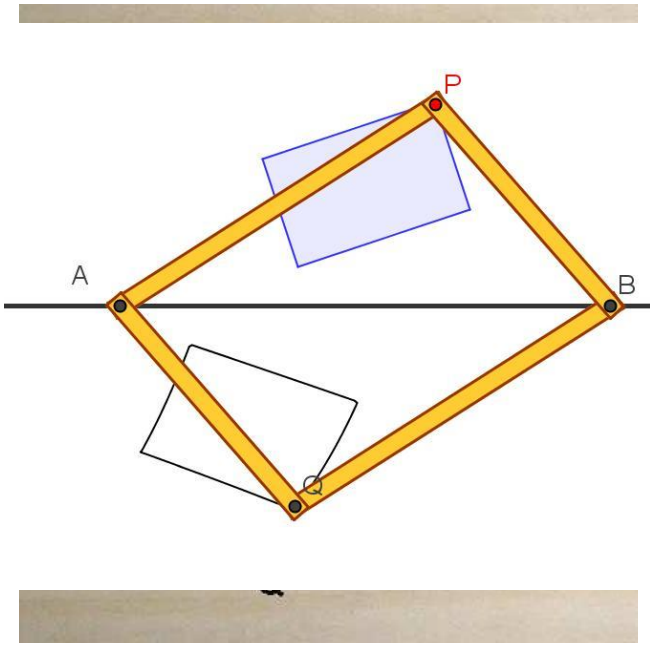
Cosa succederebbe se… cambiassimo la lunghezza delle aste?



A



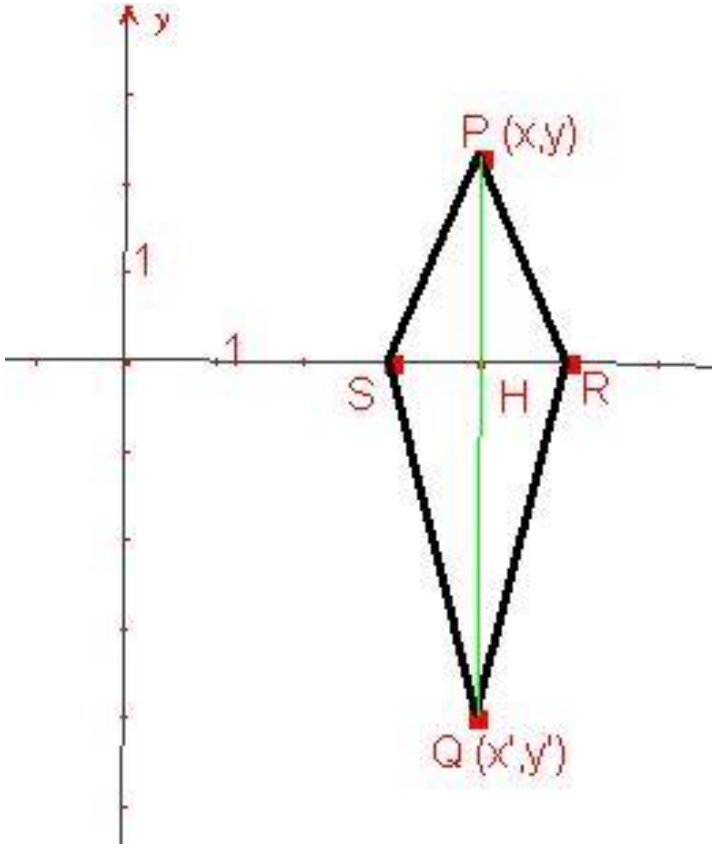
B

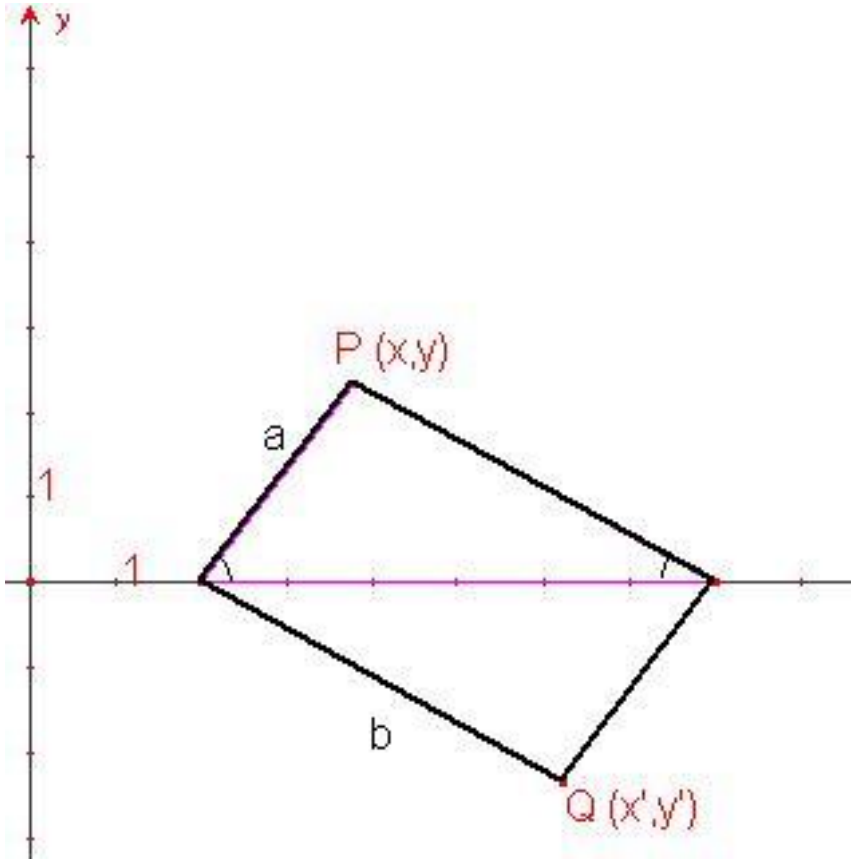


C

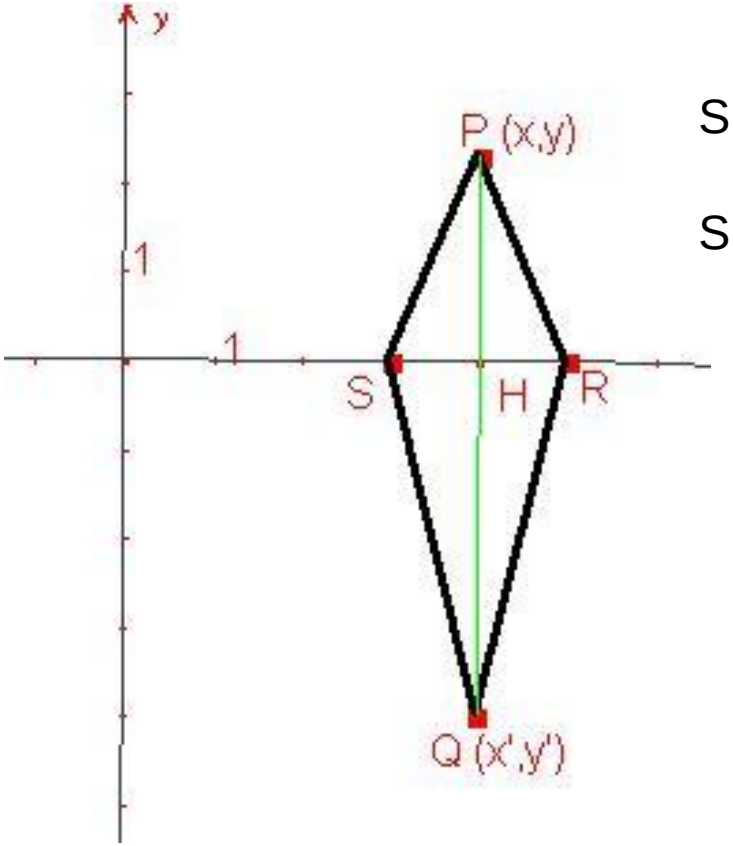
Che cosa fa? Perché?

Proviamo a scrivere le equazioni delle funzioni…





Equazioni delle funzioni svolte dalle variazioni del pantografo

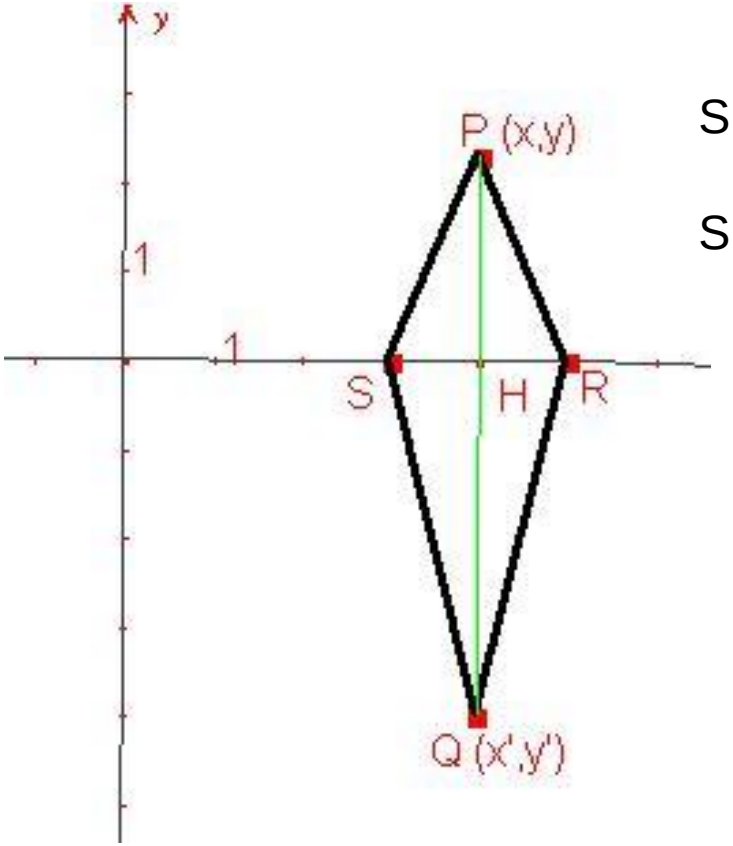


SH=HR

SP=a SQ=b

Pergola et. al. (2002)

Equazioni delle funzioni svolte dalle variazioni del pantografo



SH=HR

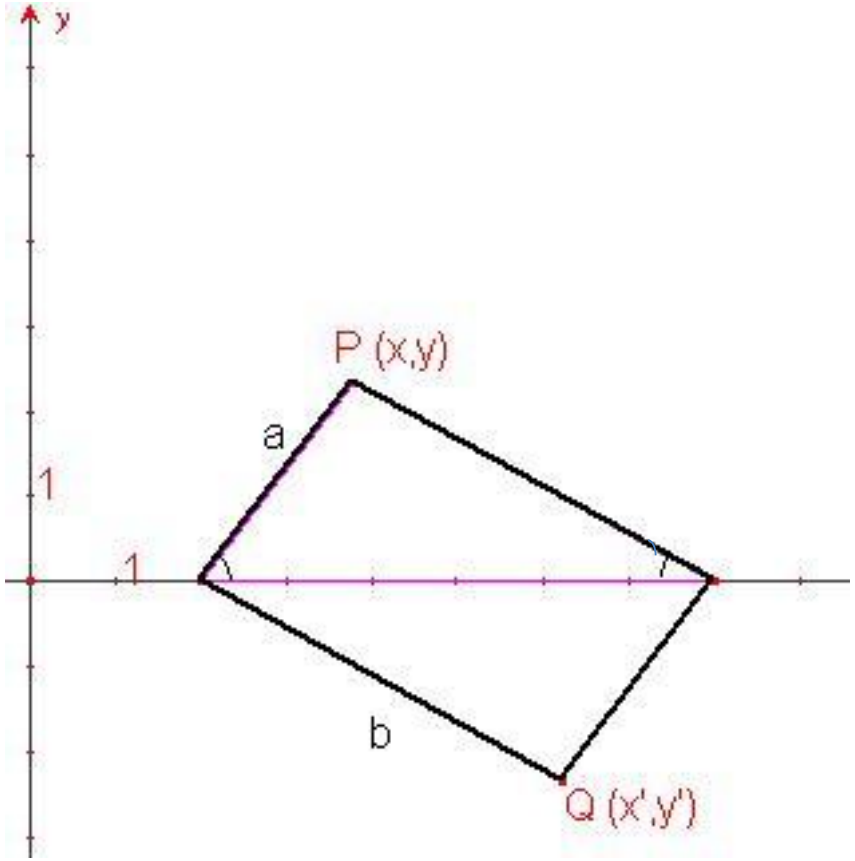
SP=a SQ=b

$$a^2 = y^2 + SH^2$$
$$SH^2 = b^2 - y'^2$$
$$a^2 = y^2 + b^2 - y'^2$$

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -\sqrt{b^2 - a^2 + y^2} \end{cases}$$

Pergola et. al. (2002)

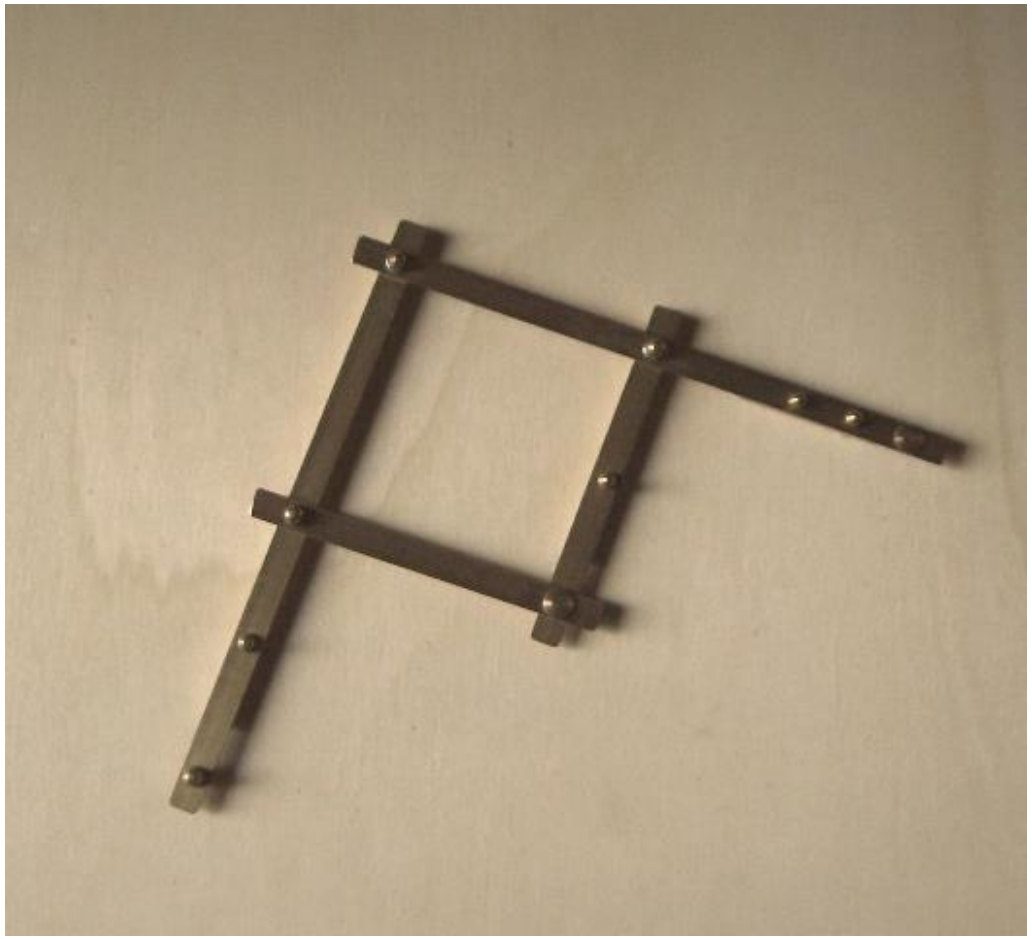
Equazioni delle funzioni svolte dalle variazioni del pantografo

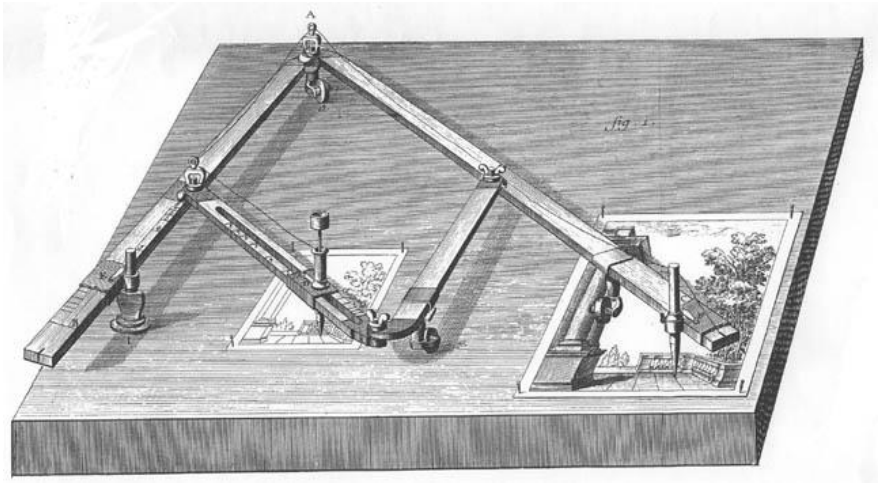


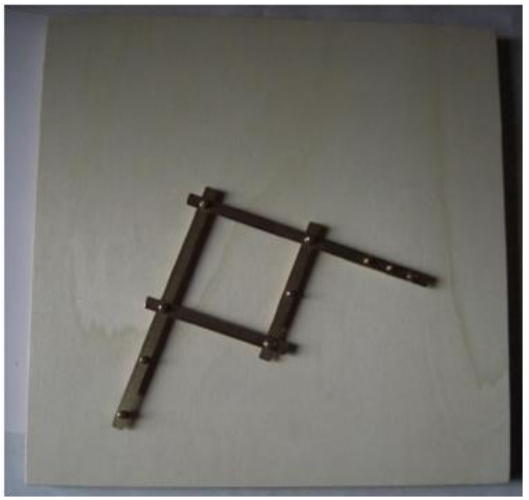
$$\begin{cases} x' = x + \sqrt{b^2 - y^2} - \sqrt{a^2 - y^2} \\ y' = -y \end{cases}$$

Pergola et. al. (2002)

Pantografo di Scheiner





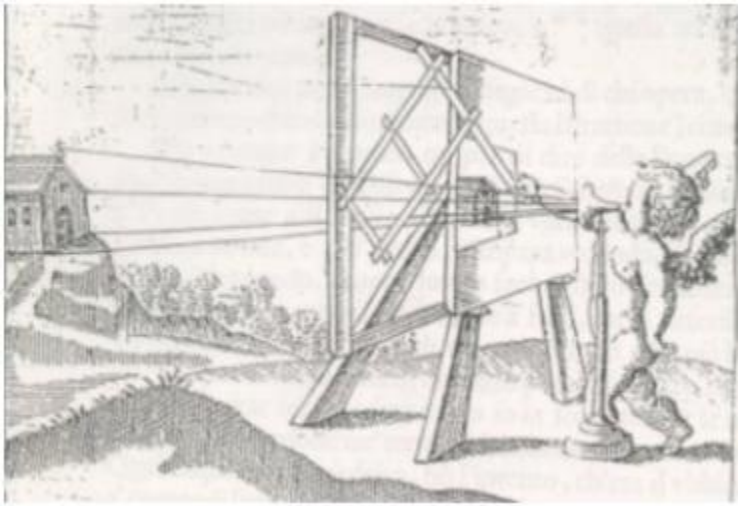


Nell'introduzione al suo "Pantographice seu ars delineandi" del 1631, Scheiner racconta che, avendo saputo che alcuni anni prima un certo Mastro Gregoriu si vantava di aver inventato uno strumento geniale per disegnare, lui stesso si era prodigato per produrre uno strumento per copiare, ingrandire e ridurre immagini.

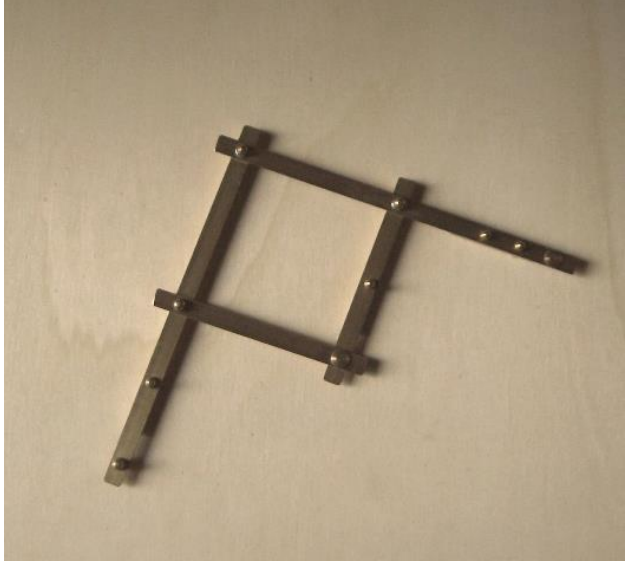
*Nel 1603 a Dillingen, un certo **Mastro Gregorius**, un pittore eccellente, si vantava con **Scheiner** di aver inventato uno strumento per disegnare, ma rifiutava in modo irritante di divulgarne i segreti. Provocatoriamente, Gregorius diceva di "non credere che una tale cosa potesse perfino essere immaginata; infatti quella non era tanto un'invenzione umana, quanto un'ispirazione divina, che egli riteneva essergli stata portata e rivelata non tramite gli sforzi umani, ma da qualche genio celeste". Quanto avrebbe rivelato a Scheiner era che il suo strumento si basava sull'uso di compassi con un centro fisso. Eccitato dalle possibilità, **Scheiner** si mise all'opera per conto proprio e dopo un periodo di intensi tentativi produsse uno strumento di grande ingegnosità e di vasta utilizzazione, per copiare, ingrandire e ridurre i disegni, per rappresentare gli oggetti in prospettiva, e per la produzione di composizioni anamorfiche".*

*(Tratto da **Kemp**, La Scienza dell'arte, Giunti 1994).*

Prospettografo di Scheiner

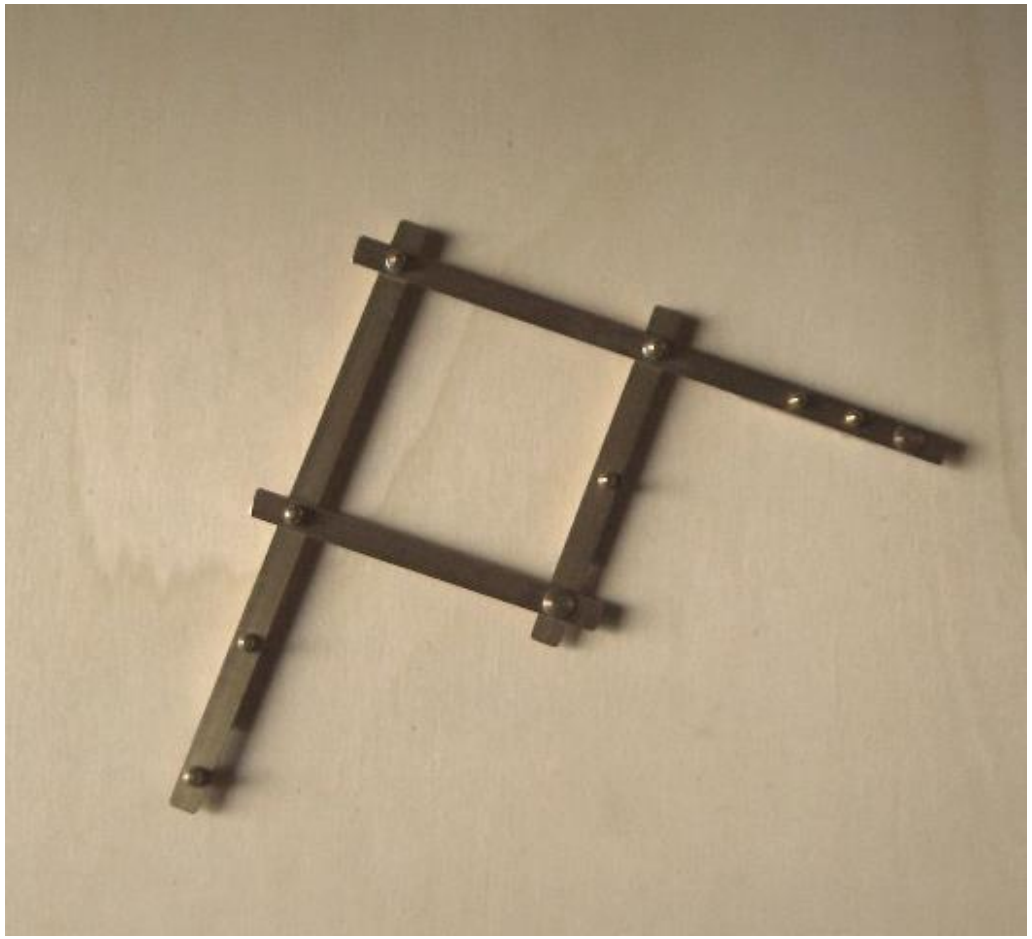


www.macchinematematiche.org

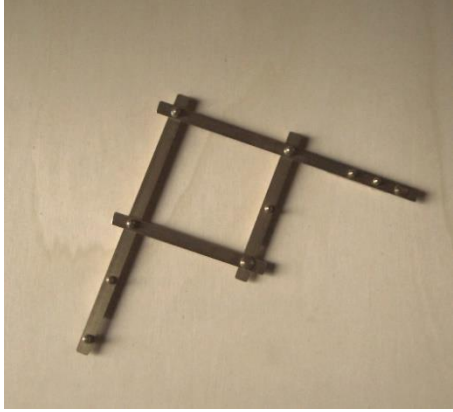


1. **Come è fatta?**
2. **Cosa fa?**
3. **Perché lo fa?**
4. **Cosa succederebbe se …?**

Pantografo di Scheiner



Esplorazione della macchina

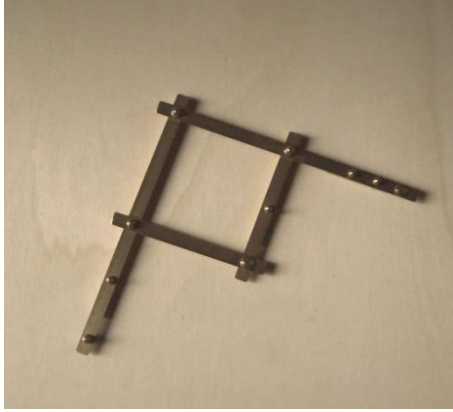


Schemi legati alla struttura della macchina:

- Individuazione di punti fissi, punti mobili (con diversi gradi di libertà), punti tracciatori e guide;
- Misura della lunghezza delle aste;
- Individuazione di figure geometriche riconosciute nella struttura formata dalle aste del sistema articolato;
- Rappresentazione della macchina o di parti di questa;
- Costruzione di figure geometriche che "estendono"/"completano" le componenti del sistema articolato;
- Ricerca delle relazioni tra le proprietà del sistema articolato e i suoi "prodotti" (i disegni delle figure descritte dai punti tracciatori).

Struttura geometrica della macchina: rappresentazione geometrica della struttura della macchina insieme alle relazioni figurali e concettuali

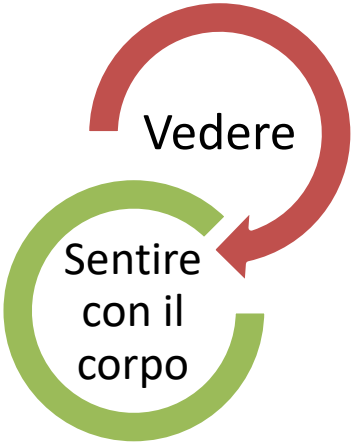
Esplorazione della macchina

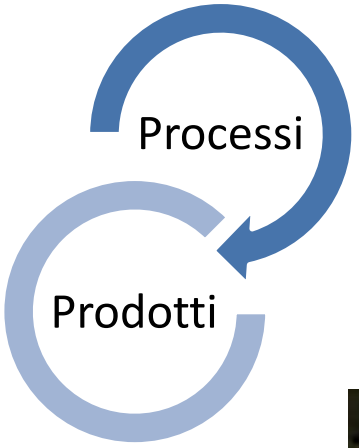


Schemi legati al movimento della macchina

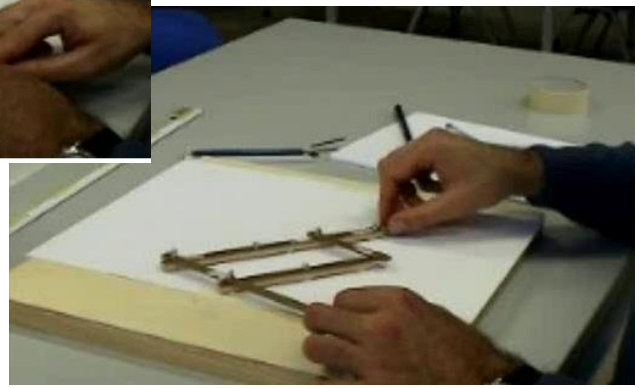
- Movimenti che si fermano in particolari configurazioni: ad esempio in configurazioni generiche, particolari, limite…
- Movimenti continui (in cui si analizza cosa varia e cosa è invariante): ad esempio movimenti casuali, movimenti guidati, movimenti di particolari configurazioni, movimenti tra le configurazioni limite, movimenti di dipendenza, movimenti nelle possibili zone d'azione.

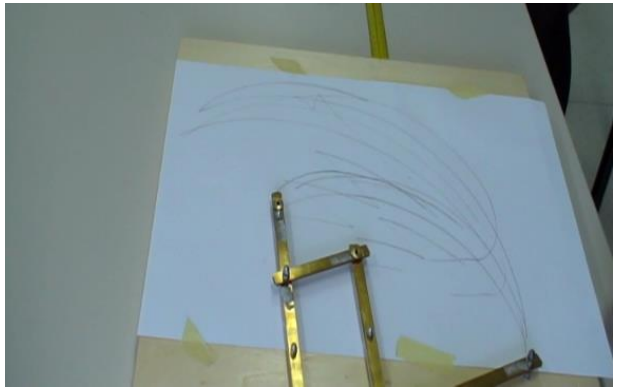
Antonini, S. & Martignone, F. (2011)
Martignone, F. & Antonini, S. (2009, 2010)

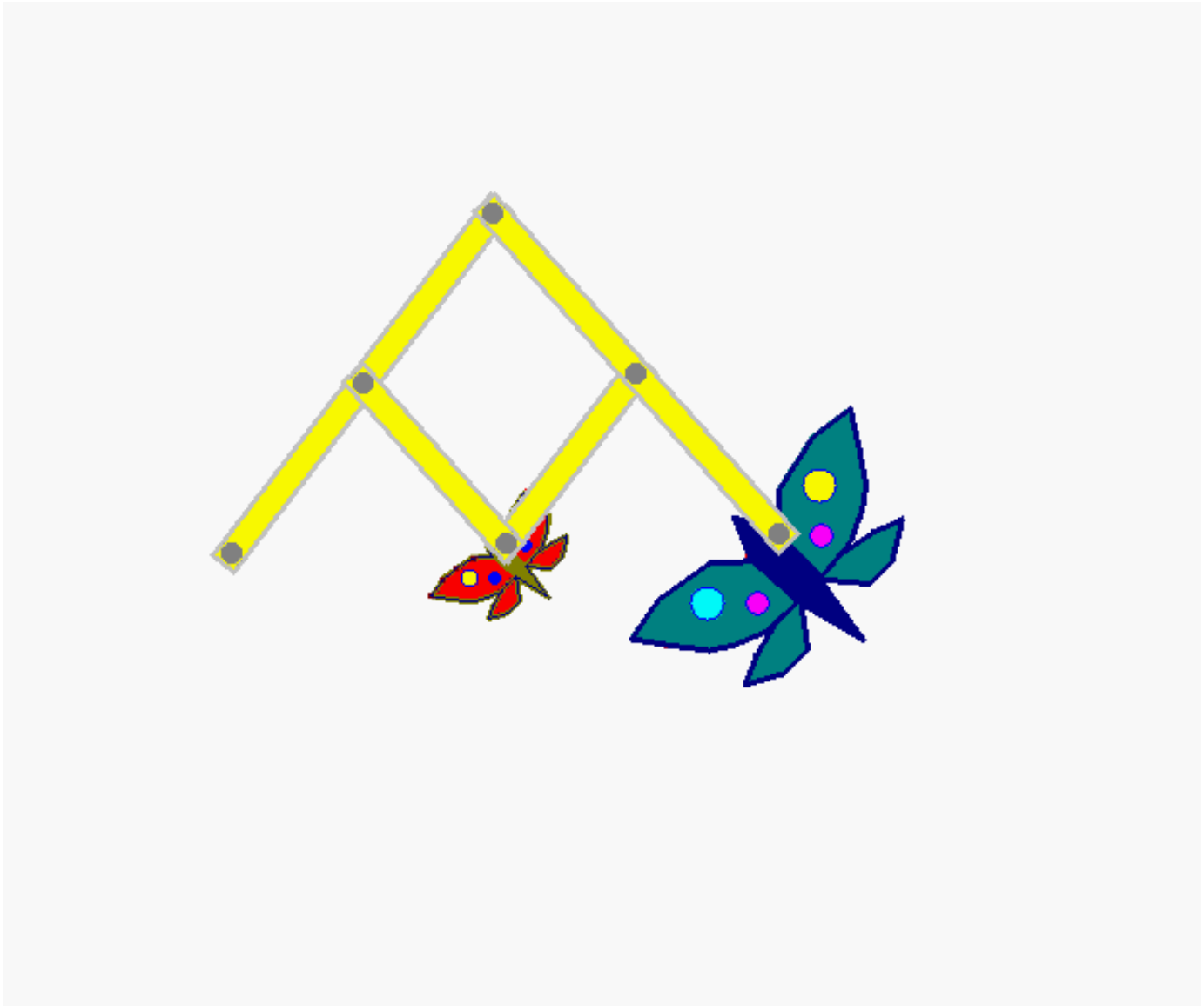




- Movimenti o parti fisse del sistema articolato
- Tracce/disegni di movimenti del sistema articolato
- Tracce/disegni che mostrano figure “trasformate”







2020

Perché lo fa?

Produzione e verifica di congetture

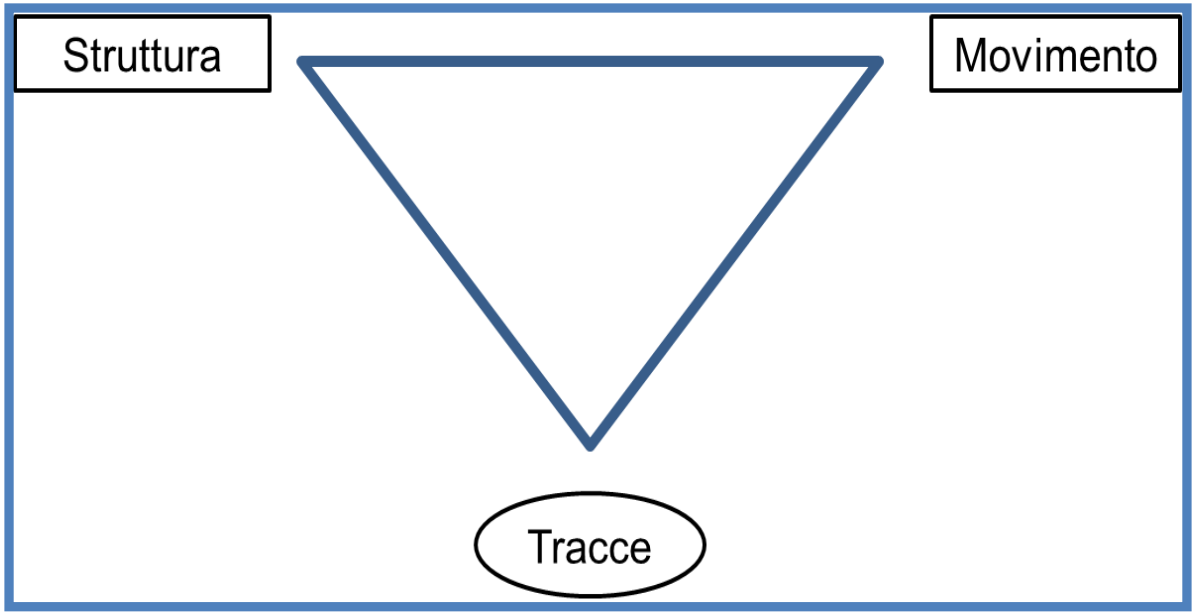
- **Argomentazioni che si basano sulla struttura**
- **Argomentazioni che di basano sul movimento**
- **Argomentazioni sulle tracce**

Perché lo fa?

Argomentazioni che si basano sulla struttura

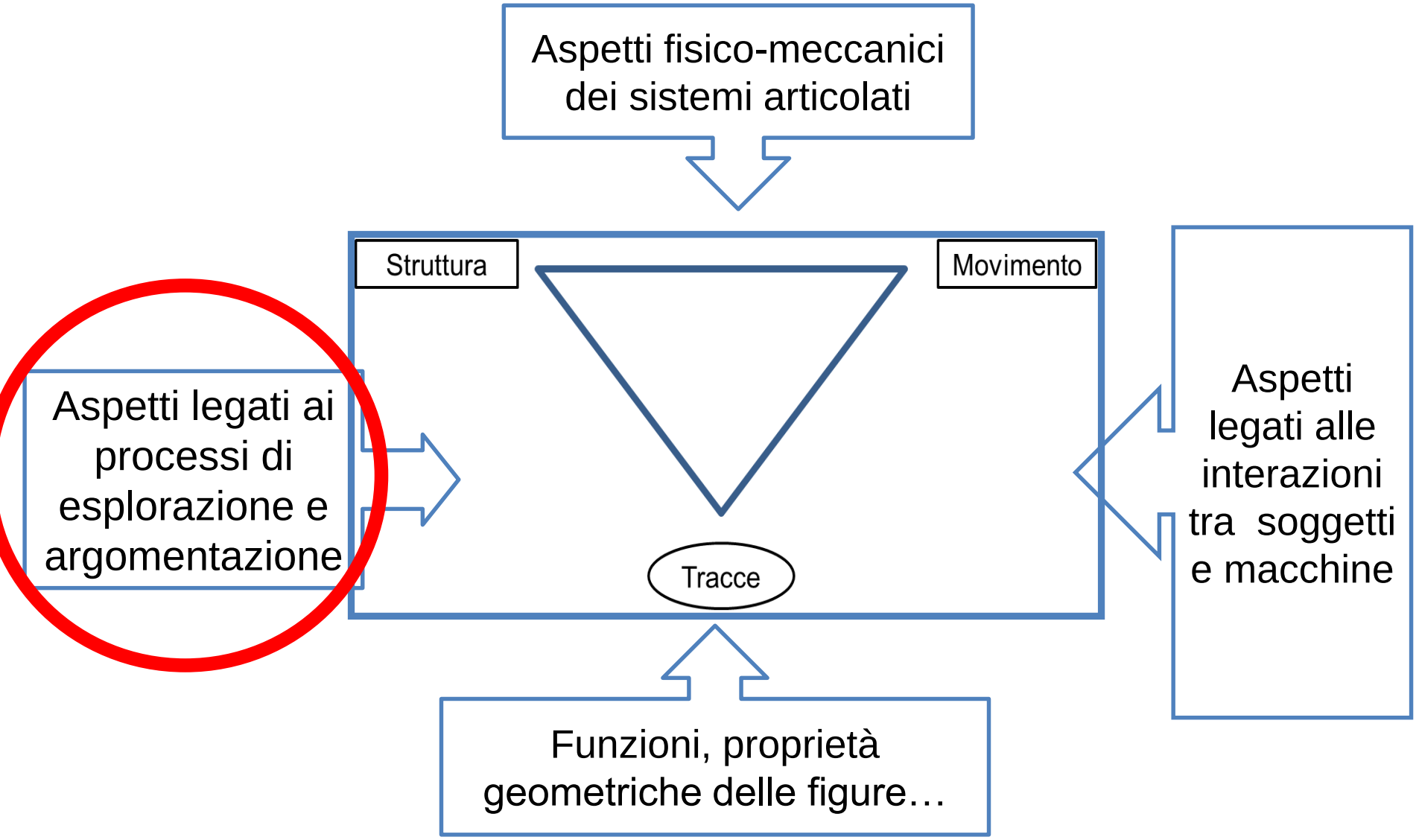
Argomentazioni che di basano sul movimento

Argomentazioni sulle tracce



Aspetti figurali

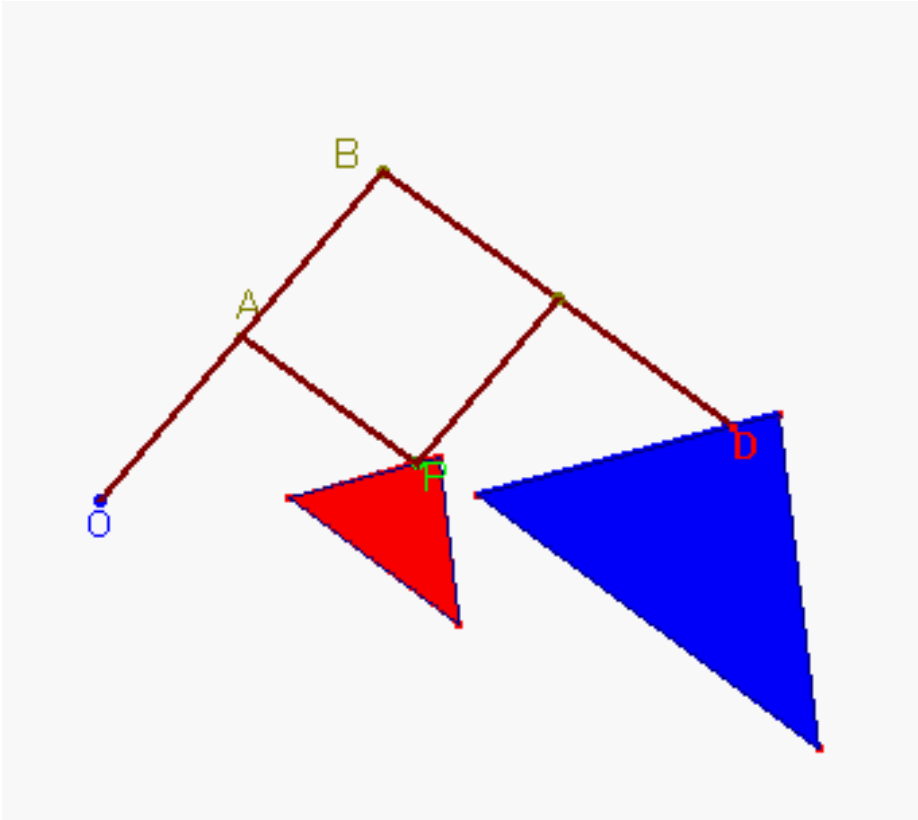
Aspetti concettuali


Aspetti fisico-meccanici dei sistemi articolati
Struttura
Movimento
Tracce
Aspetti legati ai processi di esplorazione e argomentazione
Aspetti legati alle interazioni tra soggetti e macchine
Funzioni, proprietà geometriche delle figure…

Partendo da triangoli simili…

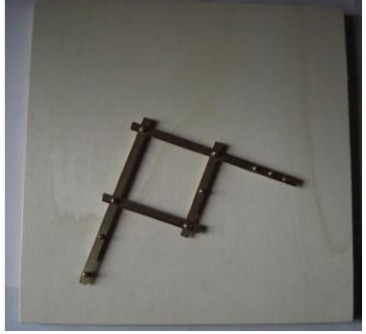
Partendo da triangoli congruenti…

ESEMPI DI ARGOMENTAZIONI

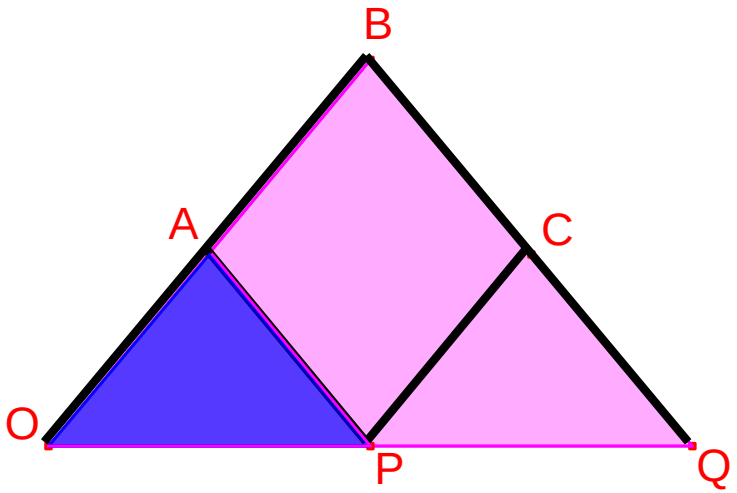


OBD simile a OAP

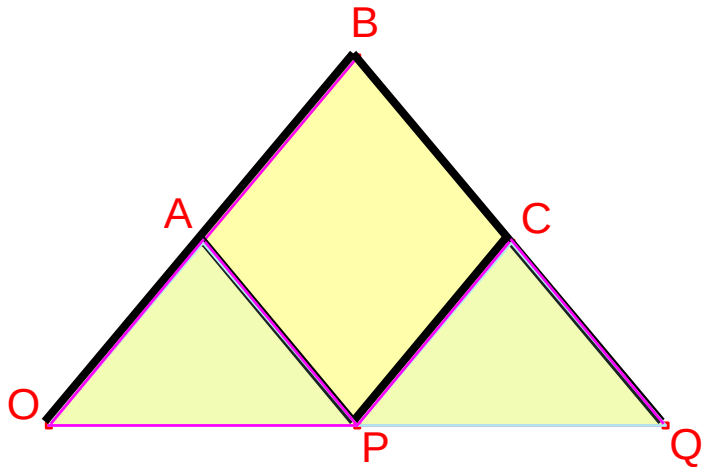
O, P e D allineati



TRIANGOLI SIMILI



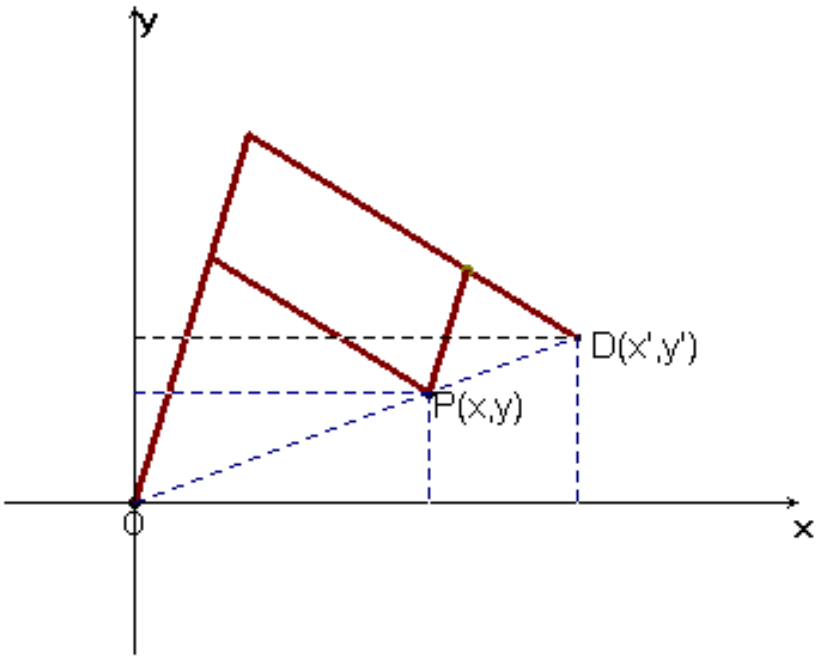
TRIANGOLI CONGRUENTI E PARALLELOGRAMMA



Relazioni di ***continuità e rottura*** che si possono verificare nel passaggio dalla fase di congettura alla produzione di argomentazioni

(Garuti & Martignone, 2010; Antonini & Martignone, 2011)

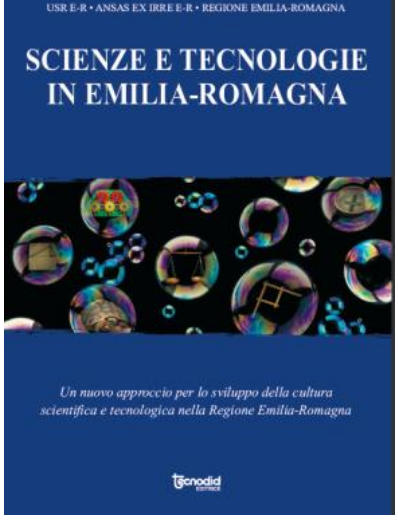
Scegliendo un opportuno riferimento cartesiano…



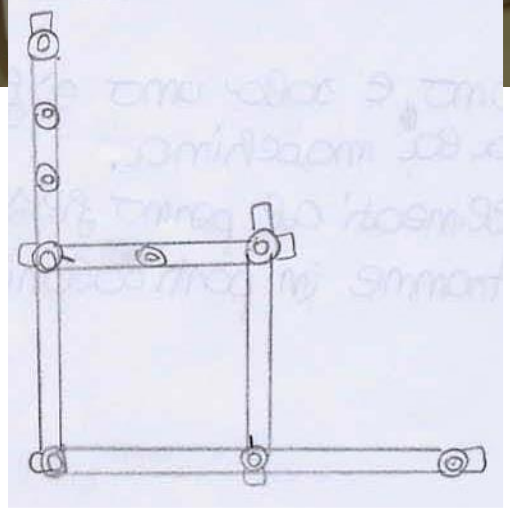
$$\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$$

PANTOGRAFO DI SCHEINER A SCUOLA

2020



Come è fatta?
Cosa fa?
Perché?



"*Nella macchina sono presenti quattro aste che si muovono ruotando attorno ad un perno fisso che è il punto di partenza. Le assi sono uguali a coppie. Ogni asta della coppia più lunga misura 20,5 cm, mentre le aste della coppia più piccola misurano 10,5 cm e sono uguali*". 2020

Mate-laboratorio

(Cremona)

Convegno "Fare Vedere Pensare la Matematica"

Convegno "Fare Vedere Pensare la Matematica": II edizione

Corso di formazione

Sperimentazioni insegnanti

Progetto MecchInAzione- Il laboratorio in classe

All'inizio dell'anno scolastico 2010-2011 si è creata una rete di scuole per la formazione e la ricerca-azione in ambito matematico, avente come scuola capofila il liceo Aselli e alla quale partecipa anche il Museo di Storia Naturale di Cremona. È stato presentato un progetto denominato MateLaboratorio, sostenuto dall'Ufficio Scolastico Territoriale di Cremona, che vede anche la collaborazione del Dipartimento di Matematica dell'Università di Modena e Reggio Emilia e dell'Associazione delle Macchine Matematiche di Modena, per stimolare, implementare e valorizzare le positive esperienze in campo metodologico didattico delle scuole della provincia di Cremona supportando la formazione degli insegnanti. Il percorso, in questa prima fase rivolto a docenti delle scuole secondarie di primo grado e del biennio delle scuole secondarie di secondo grado, vuole diffondere una metodologia di attività di laboratorio di matematica attraverso l'uso nella prassi didattica di macchine matematiche.

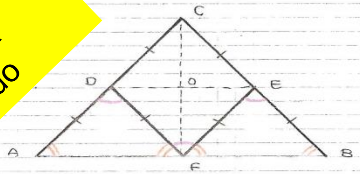
Linee guida del Progetto

Nell'anno scolastico 2012-2013 il Progetto continuerà coinvolgendo altri insegnanti delle provincia e anche insegnanti di scuole primarie. In questa seconda parte del Progetto si intende portare avanti le azioni intraprese nel biennio 2010/2012, cercando di potenziare il laboratorio di matematica attrezzato e di sviluppare ancora di più il programma di formazione insegnanti seguito da sperimentazioni condotte da questi ultimi nelle loro classi, con la raccolta della relativa documentazione. Saranno naturalmente sfruttate le risorse e le conoscenze ereditate dalle attività svolte nella prima parte del progetto: potranno, ad esempio, essere coinvolti insegnanti già formati (come tutor e testimoni) e utilizzati materiali già prodotti (report e diari degli insegnanti, protocolli, presentazioni ...).

http://www.liceoaselli.it/

Scuola secondaria di secondo grado

③



Hp: AD = CD = CE = BE = EF = DF

CO = OF

DO = OE

CF ⊥ DE

Ts: $A\hat{F}B = 180°$

$\hat{D}$ $\hat{F}E$ alterni interni con AC // EF tagliati dalla trasversale DF

$\hat{E}F$ = $D\hat{F}E$ alterni interni con BC // DF tagliato dalla trasversale EF

- $A\hat{D}F = D\hat{F}E = B\hat{E}F$ proprietà transitiva
- CD = DF per Hp
- AD = CD per Hp

① Quindi AD = DF

- $D\hat{A}F = D\hat{F}A$ poiché angoli alla base di un triangolo isoscele per dimostraz. ①
- CE = FE per Hp
- CE = BE per Hp

② Quindi FE = BE

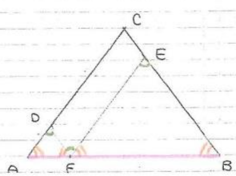
- $E\hat{B}F = E\hat{F}B$ angoli alla base di un triangolo isoscele per dimostraz. ②
- DF = EF per Hp

Quindi $D\hat{F}A = E\hat{F}B = D\hat{A}F = E\hat{B}F$

...sione:

- $A\hat{F}B = D\hat{F}A + D\hat{F}E + E\hat{F}B = 180°$ → somma degli angoli di un triangolo

④



Hp: AC = BC

AD = DF

FE = BE

CD = EF

CE = DE

Ts: $A\hat{F}B = 180°$

$A\hat{D}F = D\hat{F}E$ alterni interni con AC // EF tagliati dalla trasversale EF

$D\hat{F}E = F\hat{E}B$ alterni interni con DF // BC con trasvers. EF

Quindi $A\hat{D}F = F\hat{E}B$ proprietà transitiva

$C\hat{A}B = C\hat{B}A$ angoli alla base di un triangolo isoscele $\overset{\triangle}{ABC}$

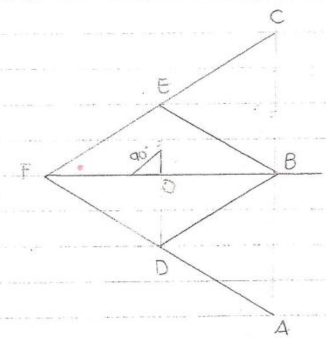
$D\hat{A}F = D\hat{F}A$ " " " " $\overset{\triangle}{DAF}$

$E\hat{B}F = E\hat{F}B$ " " " " $\overset{\triangle}{FBE}$

Conclusione:

3- PERCHE' LO FA?

Per essere un'omotetia, centro di omotetia, il punto dato e il trasformato devono trovarsi sulla stessa retta:



ip: EO ⊥ FB

EO = OD

EO = OB

EF = EB = DB = FD

FC = FA

EF = 1/2 FC   FD = 1/2 FA

FO = 1/2 FB

Ts: $C\hat{B}A = 180° = π$

Considero i triangoli $E\hat{F}O$ e $\overset{\triangle}{CFB}$:

- $C\hat{F}B$ in comune
- $\frac{OF}{EF} = \frac{FB}{CF}$ x ipotesi

Quindi sono simili

Quindi $E\hat{O}F = C\hat{B}F = 90°$ x ipotesi

Considero i triangoli $F\hat{O}D$ e $F\hat{B}A$

$B\hat{F}A$ in comune

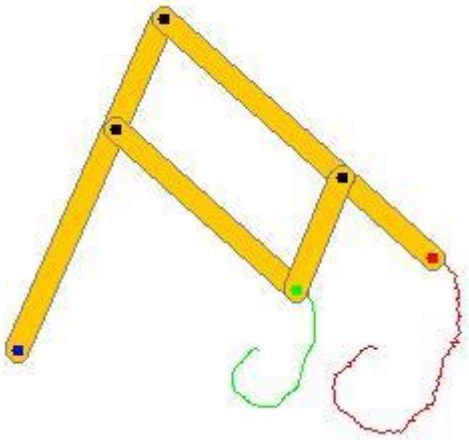
2020

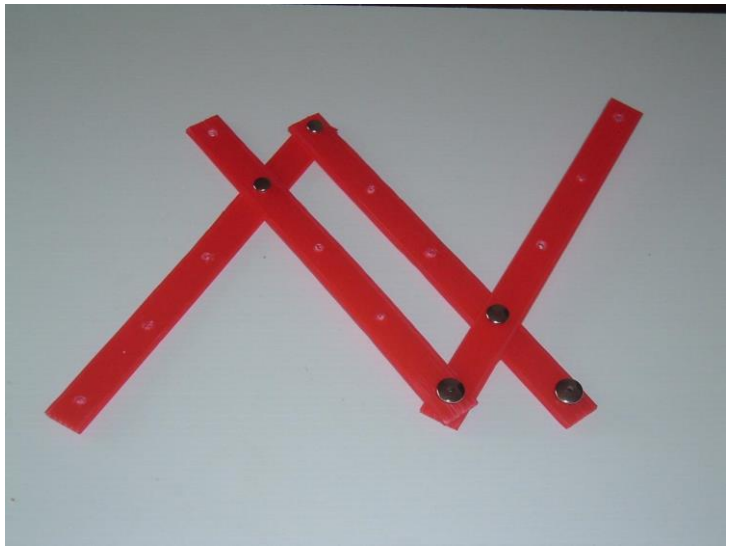
2020

PORSI E RISOVERE PROBLEMI:

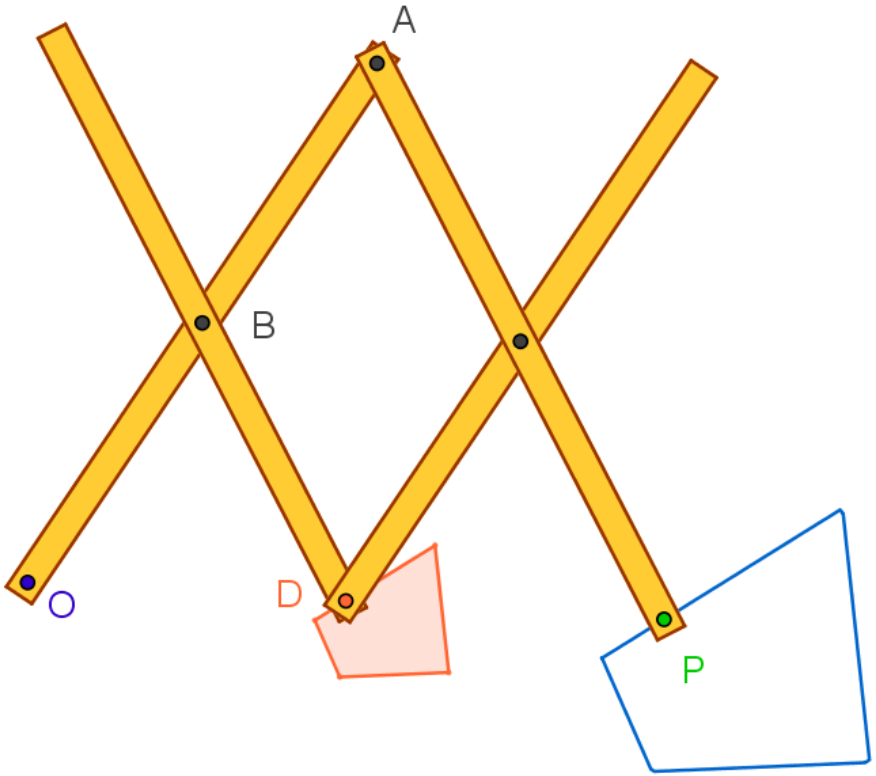
Cosa succederebbe se…?

Ingrandimenti o riduzioni





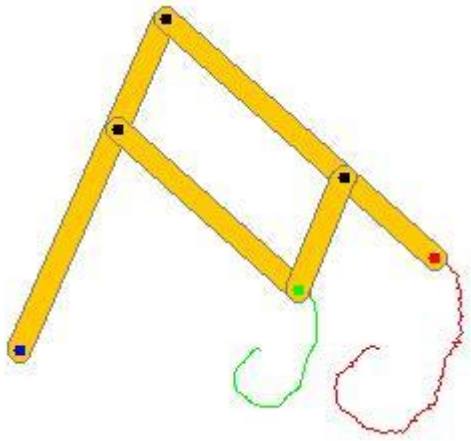
Rapporto variabile



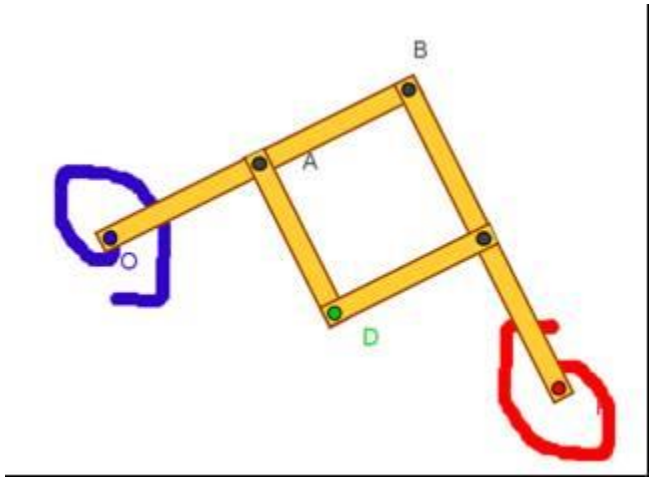
PORSI E RISOVERE PROBLEMI:

Cosa succederebbe se…?

Ingrandimenti o riduzioni

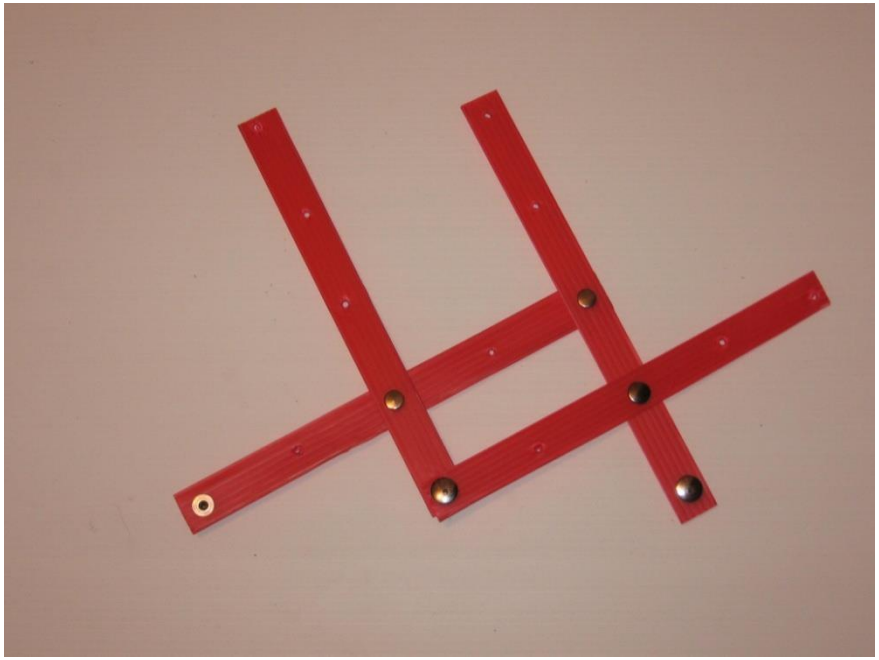


Omotetia di rapporto negativo (simmetria centrale)

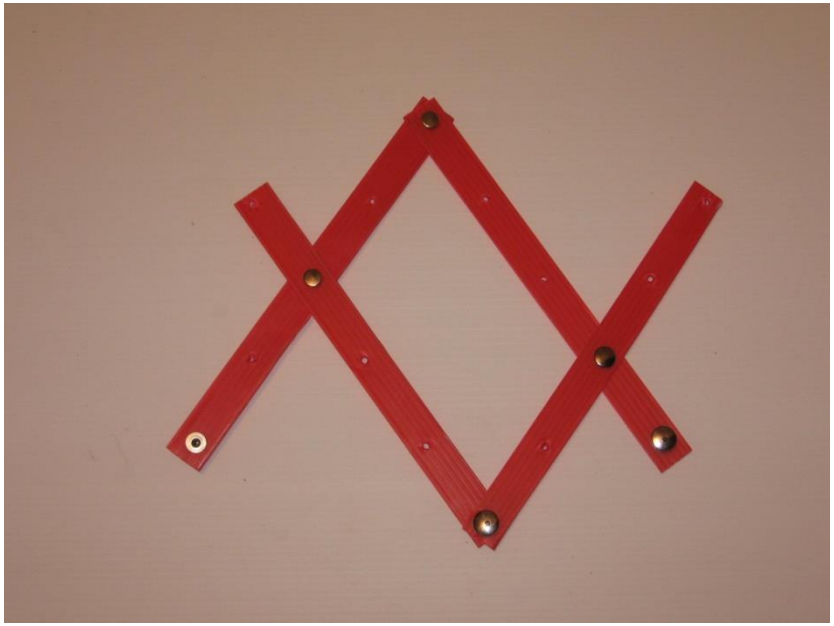


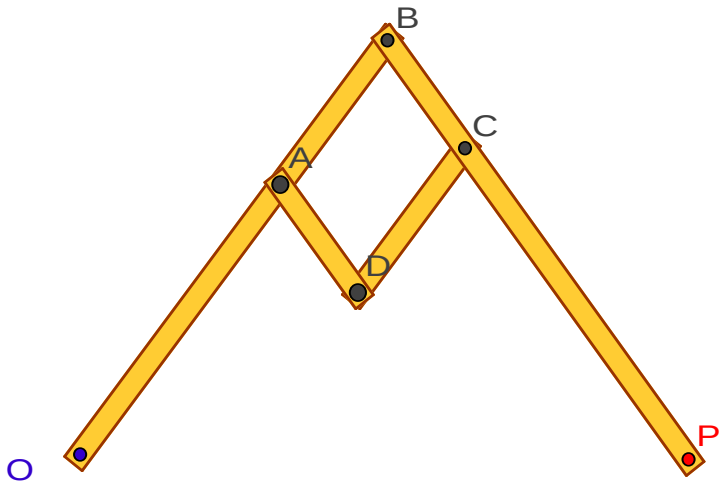
- Animazioni con GeoGebra o Cabri
- Costruzione di nuove macchine con materiali poveri: aste di plastica, bastoncini di legno…

E se le aste non formassero triangoli isosceli, ma scaleni?

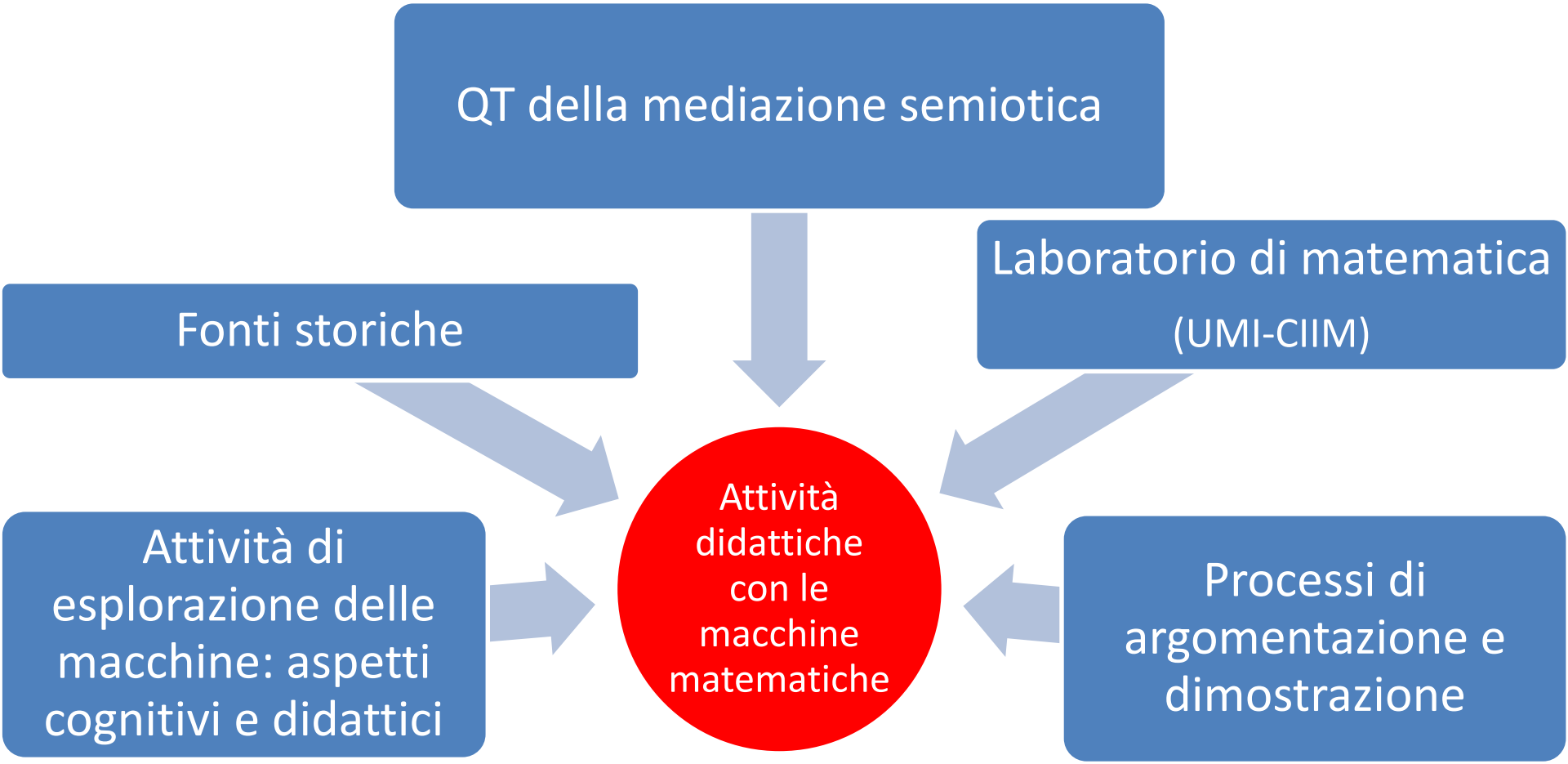


Perché non funziona?





Aspetti epistemologici, cognitivi e didattici coinvolti nelle attività laboratoriali con le macchine matematiche



Bibliografia

Antonini, S. & Martignone, F. (2011). Argumentation in exploring mathematical machines: a study on pantographs, Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 2, pp.41-48). Ankara, Turkey: PME

Banchelli S, & Martignone, F. (2013) (a). A dialogue about classroom tasks. Proc. CIEAEM65 pubblicati su Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics), G.R.I.M.. 23, Suppl. n.1. 334-342

Bartolini Bussi, M.G. & Mariotti, M.A. (2008) Semiotic mediation in the mathematics classroom: artifacts and signs after a Vygotskian perspective. In English, L. (Ed.) Handbook of International Research in Mathematics Education (2nd edition), pp. 746-783. New York, NY: Routledge.

Bartolini Bussi, M.G., Garuti, R., Martignone, F. & Maschietto, M. (2011). Tasks for teachers in the MMLab-ER project, in the Research Forum “Researching the nature and use of tasks and experiences for effective mathematics teacher education”, Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol.1, 127-130. Ankara, Turkey.

Bartolini Bussi M.G. & Maschietto, M. (2006) Macchine Matematiche: Dalla Storia Alla Scuola. Milan, Italy: Springer.

Bartolini Bussi, M.G. & Martignone, F. (2013). Cultural issues in the communication of research on mathematics education. For the Learning of Mathematics, 33(1), 2-8

Bibliografia

Bartolini Bussi, M.G. & Martignone, F. (2014). Manipulatives in Mathematics Education. In S. Lerman (Ed.), Encyclopedia of Mathematics Education, pp 365-372. Springer Dordrecht, Heidelberg, New York, London

Bartolini Bussi, M. G., & Pergola, M. (1996). History in the Mathematics Classroom: Linkages and Kinematic Geometry. In Jahnke, Knoche & Otte (eds), Geschichte der Mathematik in der Lehre, pp. 36-67

Martignone, F. & Antonini, S. (2009). Exploring the Mathematical Machines for geometrical transformations: a cognitive analysis, Proceeding of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol.4 pp.105-112). Thessaloniki.

Martignone, F. & Antonini, S. (2010). Students' utilization schemes of pantographs for geometrical transformations: a first classification, Proceedings of the Sixth Conference of European Research in Mathematics Education (1250-1259). Lyon: Institut National de Recherche

Martignone, F. & Bartolini Bussi M.G. (2010). Il Laboratorio delle Macchine Matematiche: dalla tradizione a un progetto regionale di formazione degli insegnanti della scuola secondaria, In L. Menabue e G. Santoro (eds.). New Trends in Science and Technology Education: selected papers (vol. II, pp.129-147) CLUEB Bologna

Bibliografia

Martignone, F. (2011). Laboratory activities in teacher training. In Marta Pytlak, Tim Rowland, Ewa Swoboda (Eds.). Proceedings of the Seventh Conference of European Research in Mathematics Education (2746-2755). Rzeszów Poland: University of Rzeszów and ERME

Martignone, F. (2011). Tasks for teachers in mathematics laboratory activities: a case study, Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 3, pp.193-200). Ankara, Turkey

Maschietto, M. & Martignone, F. (2008). Activities with the mathematical machines: pantographs and curve drawers. In E. Barbin, N. Stehlikova, C. Tzanakis (Eds.), History and Epistemology in Mathematics Education: Proceedings of the fifth European Summer University, Vydavatelsky Press (285-296). Prague

Pergola, M., Zanoli, C., Martinez, A. & Turrini, M. (2002). Modelli fisici per la matematica: parallelogrammi, antiparallelogrammi e deltoidi articolati. Progetto Alice, Vol. III, n°8, pp. 323-346

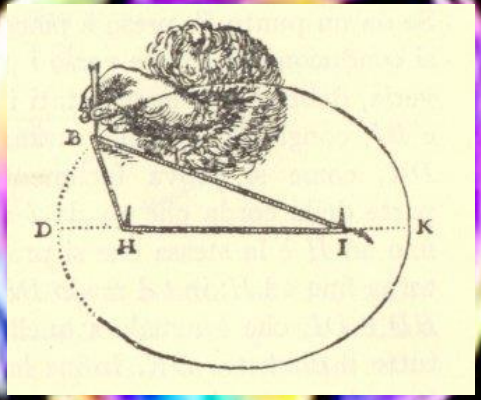
Rabardel, P. (1995). Les hommes et les technologies - Approche cognitive des instruments

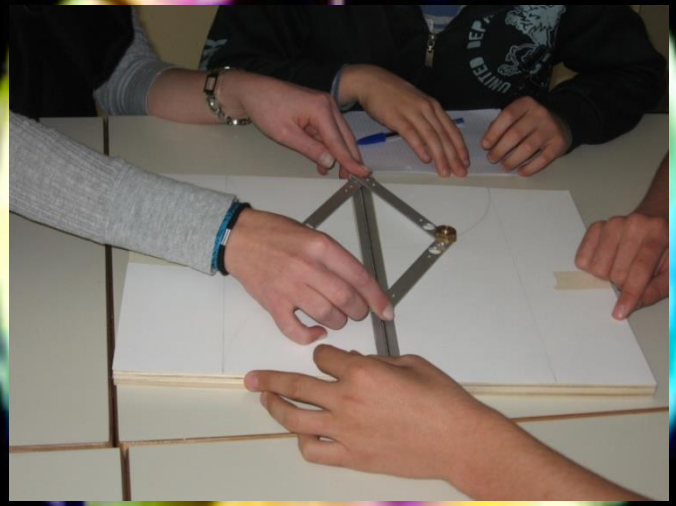
contemporains. A. Colin, Paris.

Vygotskij, L. S. (1978) Mind in Society. The Development of Higher Psychological Processes, Harvard University Press

Scienze e tecnologie in Emilia Romagna: Un nuovo approccio per lo sviluppo della cultura scientifica e tecnologica nella Regione Emilia-Romagna. Tecnodid

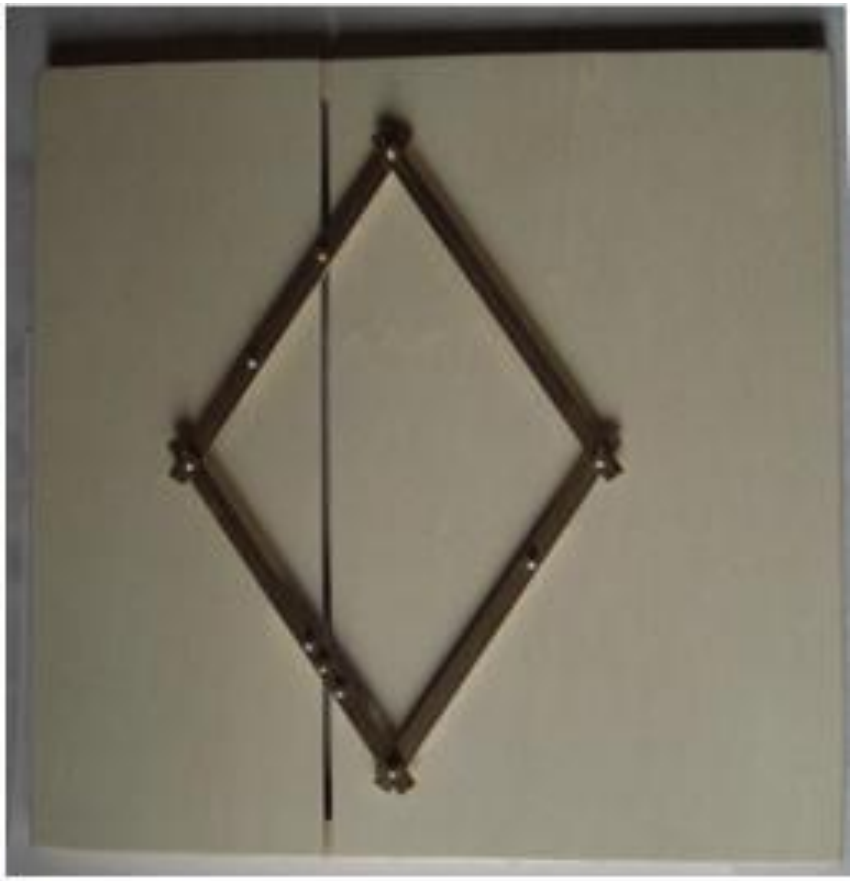
http://online.ibc.regione.emilia-romagna.it/I/libri/pdf/ScienzeTecnologie.pdf

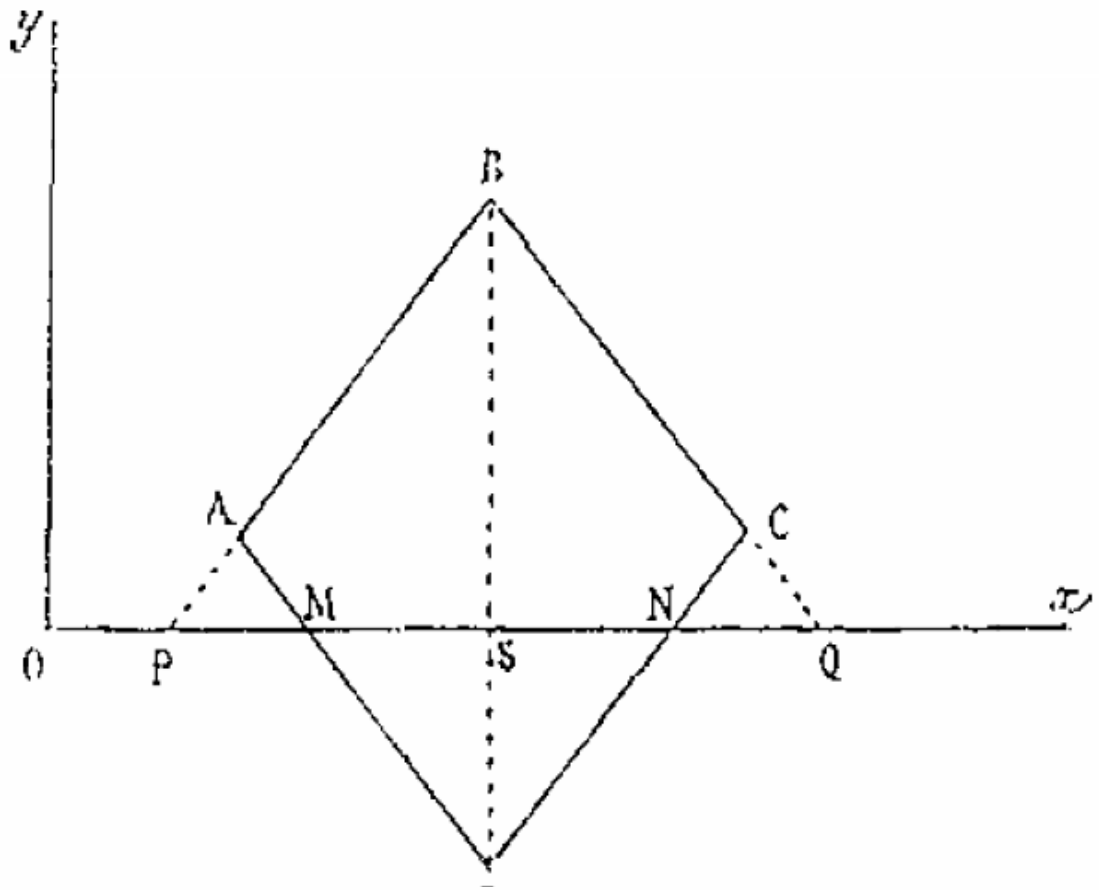




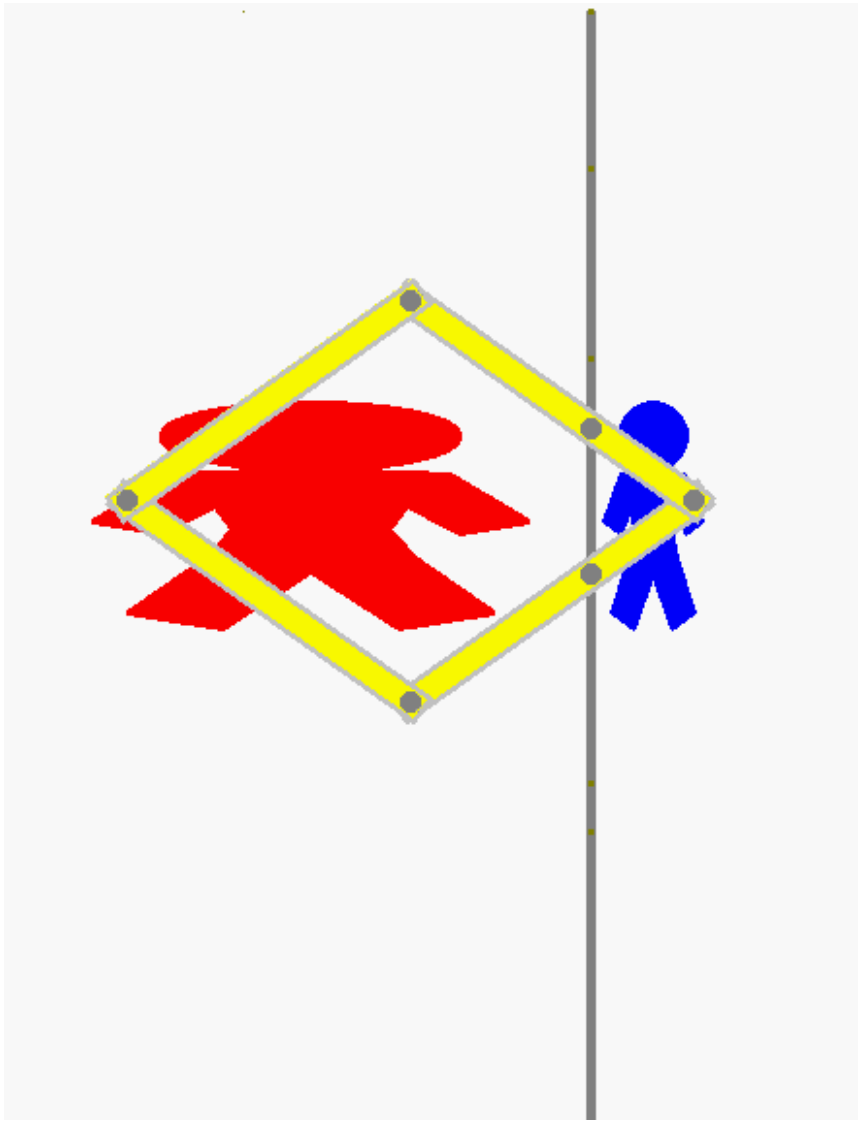
Grazie per l’attenzione!

E se il rombo fosse incernierato alla guida in modo diverso …

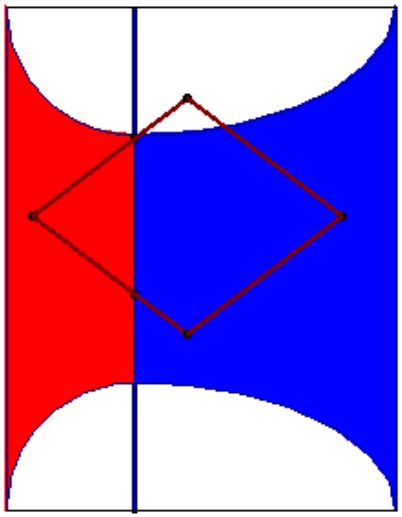




7 Schema geometrico del *projecteur*, da N. Delaunay, *Sur quelques nouveaux mécanismes*, in "Bulletin des Sciences Mathématiques", 1895

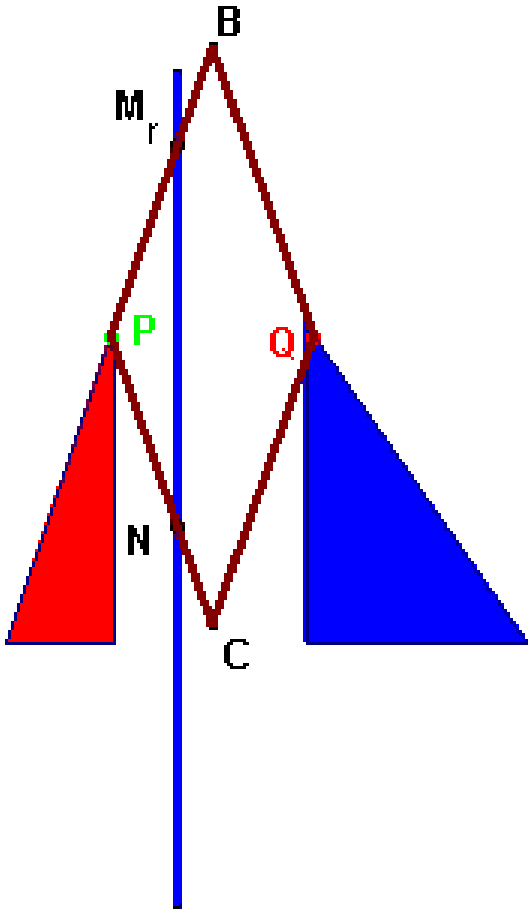


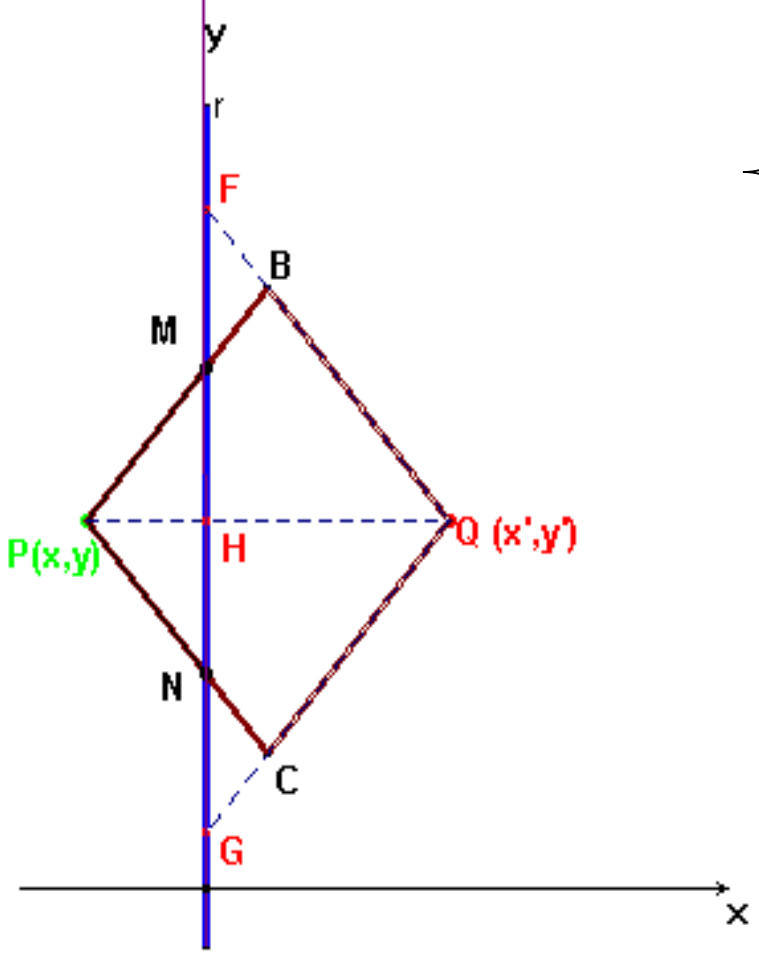
2020



Zone di piano messe in corrispondenza
dalla trasformazione geometrica

Stiramento





Equazioni:

$$\begin{cases} x' = -kx \\ y' = y \end{cases}$$

I triangoli FQG e MPN sono simili:

QH:PH=QF:PM

QH:PH=(QB+BM):PM

QB=*l* PM=*d*

QH:PH=*(2l-d):d*

K=(2l-d)/d