

# Didattica della Matematica

16 marzo 2020  
Prof.ssa Eliana Francot

$\pi$

La matematica è la disciplina che vanta il maggior numero di fallimenti formativi

- Ragazzi che riescono in tutte le altre discipline e non in matematica (il contrario è molto raro)
- Ragazzi che “staccano” con la matematica rinunciando a ogni impegno
- Ragazzi per cui la non-presenza della matematica è determinante per la scelta della scuola, del corso universitario, del mestiere futuro...
- Ragazzi che hanno debiti
- Adulti che utilizzano solo la matematica appresa alla scuola primaria
- Adulti che si “vantano” di non capire la matematica

*Che cos'è così caratteristico dell'attività  
matematica, in confronto alle altre  
attività cognitive, da suscitare difficoltà  
di apprendimento più complesse che in  
altri campi?*



## Registri di rappresentazioni semiotiche


 $\pi$ 

R. Duval *Trasformazioni di rappresentazioni semiotiche e prassi di pensiero in matematica*,  
in "La matematica e la sua didattica" 20 (4) pp. 585-619 (2006)

## Apprendimento matematico

L'apprendimento matematico consta di 4 elementi fondamentali, distinti ma tra loro interconnessi:

*L'apprendimento dei concetti (noetica)* preliminare a qualsiasi altro;

*L'apprendimento di algoritmi* (richiede capacità meccaniche e mnemoniche);

*L'apprendimento "strategico"* (capacità di argomentare, di risolvere problemi, di dimostrare);

*L'apprendimento comunicativo* (capacità di esprimere il proprio parere su cose matematiche, di descrivere un oggetto .....)

## Cosa sono gli "oggetti" matematici?

Qualcosa che esiste in se?

Il frutto di una convenzione?

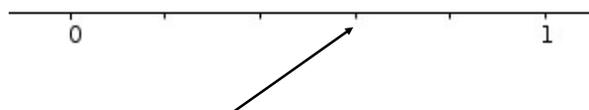
## Forse è più facile dire cosa non sono

Gli *oggetti* matematici **non sono ostensivi**

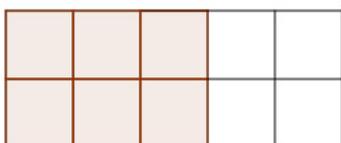
**Ostensivo** agg. [dal lat. tardo *ostensivus*, der. di *ostendĕre* «mostrare»], letter. – Che tende a mostrare o a dimostrare; in linguistica, è detta da taluni *definizione* o. una **definizione accompagnata (o sostituita) dalla presentazione dell'oggetto** significato dal vocabolo che si vuol definire (come nel caso di vocaboli che designano colori).

(Vocabolario Treccani)

Zero virgola sei



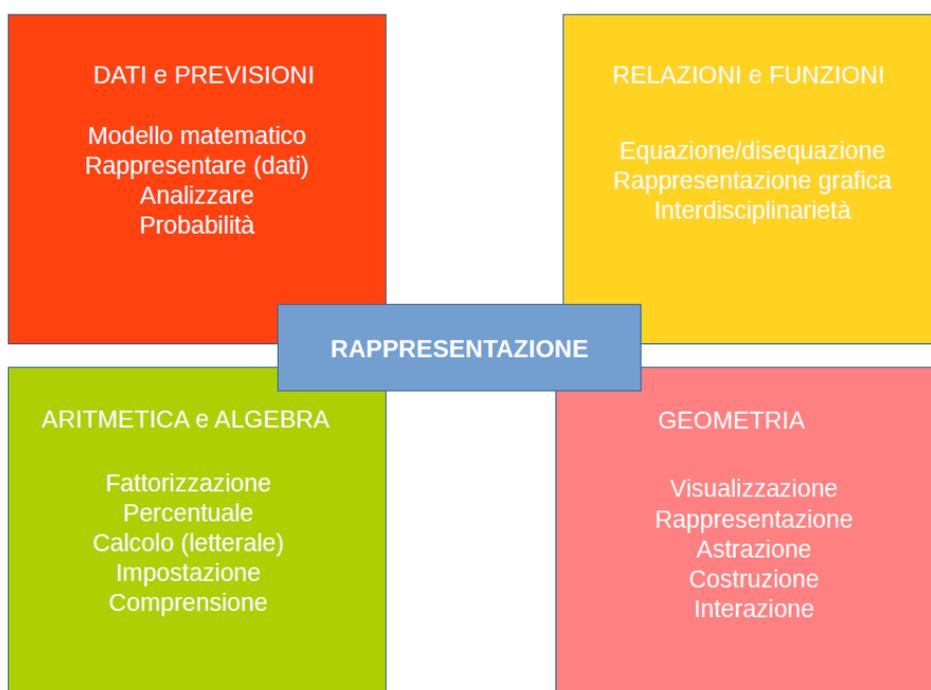
$6/10$



0.6

Il processo di insegnamento-apprendimento della matematica passa attraverso rappresentazioni, dato che non vi sono “oggetti” da esibire in loro vece o a loro evocazione; la concettualizzazione è costretta a passare attraverso

**rappresentazioni SEMIOTICHE**



## In Matematica

- non bisogna solo capire per imparare, ma *capire in modo da imparare ad imparare*: porre nuove domande, trovare mezzi per esplorarle, o quantomeno riconoscere ed applicare ciò che si suppone di aver acquisito;
- i concetti della Matematica non esistono nella realtà concreta  
*il punto P, il numero 3, l'addizione....*
- non si impara a maneggiare i concetti, ma le loro rappresentazioni semiotiche.

π

## Registri di rappresentazioni semiotiche

**Semiotica** (dal greco σημείον semeion, che significa "segno"): è la disciplina che studia i segni e il modo in cui questi abbiano un senso (significazione).



"qualcosa che sta per qualcos'altro"

### Rappresentazione semiotica:

Rappresentare concetti utilizzando sistemi di segni.

### Registro:

Varietà di lingua impiegate a seconda del tipo di rapporto psicologico e sociale sussistente tra i locutori, delle circostanze in cui avviene la comunicazione e del mezzo impiegato.

## «UNA E TRE SEDIE» KOSUTH 1965



Per realizzare la fotografia, Kosuth ha giustapposto tre elementi nel montaggio che ha fotografato.

Una sedia contro il muro (l'oggetto stesso).



La fotografia della sedia contro il muro (un'immagine dell'oggetto)



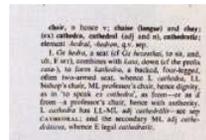
Una pagina di dizionario aperta alla voce "sedia" e incollata sul muro (una descrizione verbale)

$$\{ O, R(O) \}$$

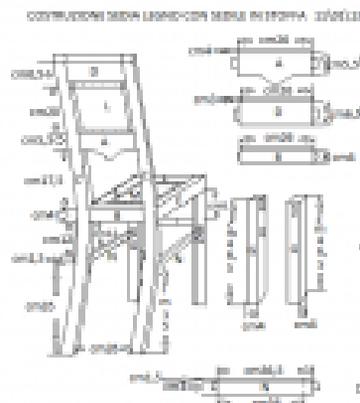
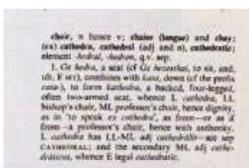
Oggetto



Sua rappresentazione



# { R.A(O), R.B(O)... }



Basta sostituire la sedia con qualunque altro oggetto per constatare che la presentazione in parallelo di rappresentazioni diverse (la seconda giustapposizione) si ritrova in qualsiasi pagina di manuale, di rivista, di scheda di lavoro, di comunicazione aziendale.

L'attività cognitiva sollecitata è il riconoscimento di oggetti rappresentati mediante rappresentazioni differenziate che devono spiegarsi a vicenda.

La doppia giustapposizione permette di porre i due seguenti problemi cruciali:

1. Ci sono molte situazioni nelle quali si dà soltanto una rappresentazione senza alcun altro accesso all'oggetto studiato.

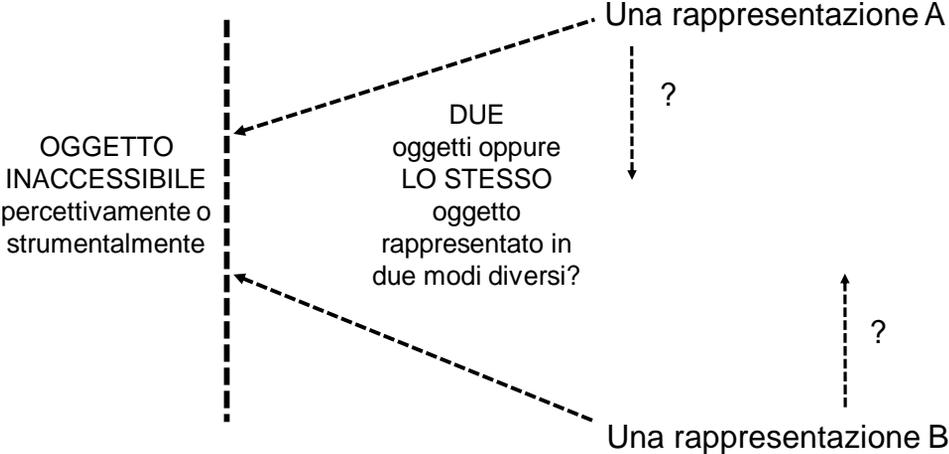
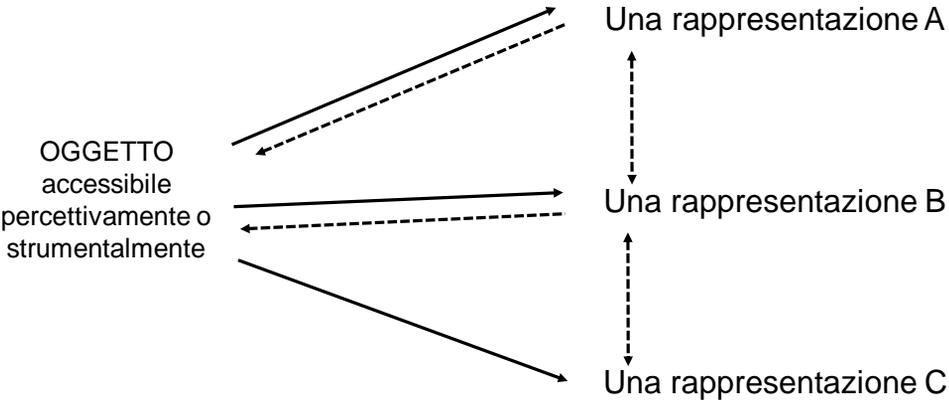
$$\{ ? , R(O) \}$$

*Come è possibile acquisire la conoscenza di oggetti o fenomeni ai quali non si può avere accesso attraverso un'esperienza più o meno diretta o personale?*

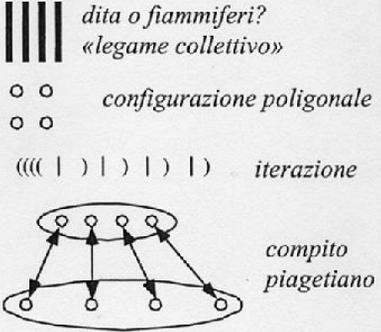
2. Quando mettiamo fianco a fianco parecchie rappresentazioni di uno stesso oggetto, per confrontarle, possiamo constatare che i loro contenuti non hanno quasi niente in comune.

$$\{ R.A(O), R.B(O), R.C(O)... \}$$

*Come riconoscere che è lo stesso oggetto che è rappresentato se i contenuti delle diverse rappresentazioni non presentano alcuna somiglianza e se non si ha un altro accesso a questo oggetto se non attraverso rappresentazioni?*



È questo il problema che si rivela cruciale nell'apprendimento della matematica.

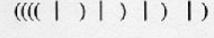
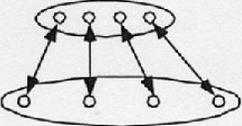
Rappresentazione ICONICA Rappresentazioni "proprie"	Rappresentazioni SIMBOLICHE (cifre o parole)
 <p><i>dita o fiammiferi?</i> <i>«legame collettivo»</i></p> <p><i>configurazione poligonale</i></p> <p><i>iterazione</i></p> <p><i>compito piagetiano</i></p>	<p><b>4</b> SISTEMA decimale</p> <p><b>100</b> SISTEMA binario</p> <p>Questi sistemi di posizione in base <math>n</math> implicano questo segno per eccellenza, "0", che non si sente nell'oralizzazione della scrittura simbolica, e aprono possibili estensioni.</p> <p><b>64/16</b> scrittura frazionaria.</p> <p><b>Quattro</b> denominazione verbale il cui senso deriva dal suo posto in una successione di denominazioni.</p>

La giustapposizione di otto rappresentazioni possibili di un numero illustra bene la complessità di questo problema.

Quando un alunno usa una o due di queste rappresentazioni è poi capace di riconoscere i numeri in una terza o quarta rappresentazione?

In Matematica, l'acquisizione concettuale di un oggetto passa necessariamente attraverso l'acquisizione di una o più **rappresentazioni semiotiche** nello stesso registro oppure in registri differenti.

È questo il problema che si rivela cruciale nell'apprendimento della matematica.

	<b>r<sup>1</sup></b> Rappresentazione ICONICA Rappresentazioni "proprie"	<b>r<sup>2</sup></b> Rappresentazioni SIMBOLICHE (cifre o parole)	
<b>R<sub>1</sub><sup>1</sup>(4)</b>	 dita o fiammiferi? «legame collettivo»	<b>4</b> SISTEMA decimale	<b>R<sub>1</sub><sup>2</sup>(4)</b>
<b>R<sub>2</sub><sup>1</sup>(4)</b>	 configurazione poligonale	<b>100</b> SISTEMA binario	<b>R<sub>2</sub><sup>2</sup>(4)</b>
<b>R<sub>3</sub><sup>1</sup>(4)</b>	 iterazione	Questi sistemi di posizione in base n implicano questo segno per eccellenza, "0", che non si sente nell'oralizzazione della scrittura simbolica, e aprono possibili estensioni.	
<b>R<sub>4</sub><sup>1</sup>(4)</b>	 compito piagetiano	<b>64/16</b> scrittura frazionaria.	<b>R<sub>3</sub><sup>2</sup>(4)</b>
		<b>Quattro</b> denominazione verbale il cui senso deriva dal suo posto in una successione di denominazioni.	<b>R<sub>4</sub><sup>2</sup>(4)</b>

**Concetto A = retta**

**Registri semiotici  $r^m$**

- Registro semiotico: **la lingua comune**: RETTA
- Registro semiotico: **disegno** \_\_\_\_\_
- Registro semiotico: **linguaggio algebrico**  $y = px + q$

### Concetto: «Dividere a metà un intero»

- Registro semiotico: il **linguaggio naturale**

Rappresentazione semiotica: *un mezzo*

Rappresentazione semiotica: *la metà*

- Registro semiotico: il **linguaggio figurale**

Rappresentazione semiotica: 

- Registro semiotico: il **linguaggio aritmetico**

Rappresentazione semiotica:  $\frac{1}{2}$  (scrittura frazionaria)

Rappresentazione semiotica: 0,5 (scrittura decimale)

Rappresentazione semiotica:  $5 \times 10^{-1}$  (scrittura esponenziale)

### Dalla semiotica alla noetica

L'insegnante (che conosce il concetto) propone allo studente (che non conosce ancora il concetto) alcune delle sue rappresentazioni semiotiche.

Attraverso le rappresentazioni semiotiche lo studente dovrebbe costruire l'apprendimento concettuale di quel concetto.

Se lo studente conoscesse già il concetto, potrebbe riconoscere in quelle rappresentazioni semiotiche il concetto; ma non conoscendolo vede solo delle rappresentazioni, cioè oggetti concreti.

Vedendo lo studente manipolare quelle rappresentazioni semiotiche, l'insegnante si illude che egli stia di fatto manipolando il concetto.

## Dalla semiotica alla noetica

ATTENZIONE: lo studente potrebbe aver imparato solo a manipolare le rappresentazioni semiotiche senza aver costruito il concetto.

Non ci sono ricette miracolistiche, c'è solo la consapevolezza.

E' necessario porre attenzione agli apprendimenti degli studenti, verificando se appartengono davvero alla sfera della noetica e non solo alla semiotica.

Nel caso della matematica l'apprendimento non può avvenire per mezzo di un'esperienza diretta con gli oggetti studiati, ma solo attraverso lo sviluppo della **consapevolezza** che diverse rappresentazioni siano davvero rappresentazioni di uno stesso "oggetto matematico."

**COME SI ACQUISISCE TALE CONSAPEVOLEZZA?**

**IMPARANDO A MANIPOLARE  
LE RAPPRESENTAZIONI SIMBOLICHE**



## Il concetto di dividere a metà un intero

- Il passaggio da una rappresentazione semiotica ad un'altra dello stesso registro semiotico è una "trasformazione di trattamento":

$\frac{1}{2}$  Trasformazione di trattamento → 0,5

- Il passaggio da una rappresentazione semiotica ad un'altra di un altro registro semiotico è una "trasformazione di conversione":

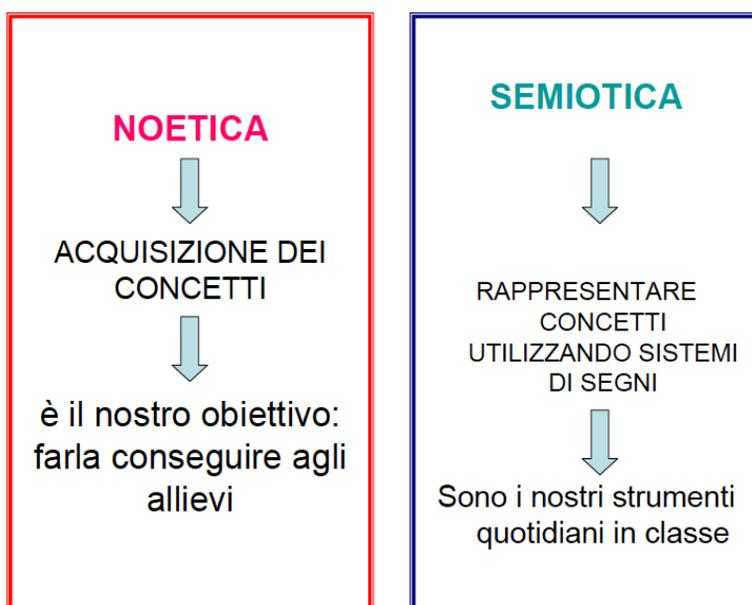
$\frac{1}{2}$  Trasformazione di conversione → 

## Dalla semiotica alla noetica

Non si impara automaticamente a gestire i diversi registri, a scegliere i tratti distintivi del concetto da trattare, a convertire.

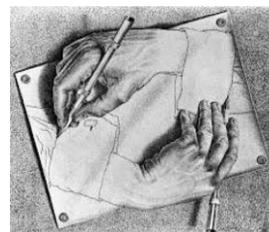
Questo apprendimento deve essere il risultato di un insegnamento esplicito nel quale l'insegnante chiama ad essere corresponsabile lo studente.

L'apparente semplicità di certi registri non deve far credere che lo studente se ne appropri e ne sia già padrone.



«Non c'è noetica senza semiotica»  
(Duval, 1993)

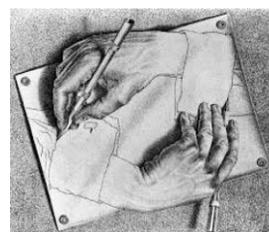
## Il paradosso di Duval



« da una parte, l'apprendimento degli oggetti matematici non può che essere un apprendimento concettuale e, d'altra parte, è solo per mezzo di rappresentazioni semiotiche che è possibile un'attività su degli oggetti matematici. Questo paradosso può costituire un vero circolo vizioso per l'apprendimento.

**Come dei soggetti in fase di apprendimento potrebbero non confondere gli oggetti matematici con le loro rappresentazioni semiotiche, se essi non possono che avere relazione con le sole rappresentazioni semiotiche?**

## Il paradosso di Duval



L'impossibilità di un accesso diretto agli oggetti matematici, al di fuori di ogni rappresentazione semiotica, rende la confusione quasi inevitabile.

E, al contrario, come possono essi acquisire la padronanza dei trattamenti matematici, necessariamente legati alle rappresentazioni semiotiche, se non hanno già un apprendimento concettuale degli oggetti rappresentati?»

## La perdita di senso

Insegnante: «*Immagina di spiegare ad un tuo compagno che cos'è una retta in matematica*».

Allievo: «*Gli direi che è tre puntini, un segmento, tre puntini*».

«Un punto è un ente geometrico che ha dimensione zero; è un tondino; se ne modifico la forma non è più un punto»

## Esplicitare le conversioni

*La traslazione è una particolare isometria definita mediante un vettore: la traslazione di vettore  $(a,b)$  è la trasformazione definita da  $(x,y) \rightarrow (x + a, y + b)$*

C'è una conversione, non esplicitata, tra un registro geometrico ed uno algebrico (che sottintende una corrispondenza tra punti del piano-coppie di numeri reali).

tradurre il testo di un problema  
 registro linguistico  $\xrightarrow{\hspace{2cm}}$  registro matematico  
 $\xleftarrow{\hspace{2cm}}$   
 spiegare la risoluzione del problema

tracciare il grafico di una funzione  
 registro alg./anal.  $\xrightarrow{\hspace{2cm}}$  registro geometrico  
 $\xleftarrow{\hspace{2cm}}$   
 congetturare l'espressione alg./anal.

costruire la tabella di valori numerici  
 trovare le soluzioni di un'equazione  
 registro alg./anal.  $\xrightarrow{\hspace{2cm}}$  registro numerico  
 $\xleftarrow{\hspace{2cm}}$   
 ipotizzare un andamento  
 scrivere un'equazione fissate le soluzioni

## Trattamento e perdita di senso

*Calcolare la probabilità del seguente evento: uscita di un numero pari nel lancio di un dado. (Primaria)*

**Soluzione condivisa:**  $3/6$  (casi favorevoli/casi possibili)

**Trattamento:**  $50/100$

Si propone come risposta  $50\%$  (conversione) e poi  $1/2$ : tutti sono d'accordo

## Trattamento e perdita di senso

*Traduci in linguaggio algebrico “la somma di tre numeri naturali consecutivi.” (Università)*

**Conversione:**  $(n-1)+n+(n+1)$

**Trattamento:**  $3n$

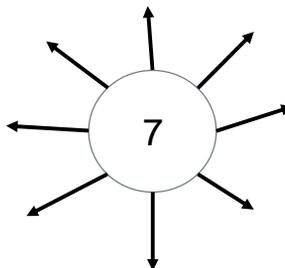
IV elementare:

«Completa:  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots = 2$ »

$$1 + 0,50 + 0,25 + 0,20 + \dots = 2$$

### *L'esperienza con i numeri in una classe prima*

- Ins supplente (alla lavagna): “La maestra mi ha detto di fare questo disegno. Cosa significa?”



- Luc: “È il sole del 7”
- Ins supplente: (va verso la finestra, guarda il cielo...)
- Luc: “No! Non il sole! È tipo il sole! Ha un cerchio con tante frecce e allora si chiama così”.

- Ins supplente: “Perché prima ho scritto 7 e 0 e adesso 2 e 5?”
- Val: “Perché è il 7”.
- Ins supplente: “Ah! È il 7. Ma 7 cosa?”
- Mar: “Il regolo nero”.
- Ins supplente: “Il regolo nero è il 7?”
- Classe: “Sì!”



## Numero 7

### **Registri semiotici $r^m$ e Rappresentazioni semiotiche $R_i^m(A)$**

1. *la lingua naturale*: “sette” (il suono) e “sette” (la scrittura)
2. *la lingua aritmetica*: 7
3. *il colore*: nero
4. *la grandezza* una determinata grandezza
5. *il disegno* il disegno del regolo
6. *varie rappresentazioni iconiche* il sole

*“Una complessa e macchinosa messa in scena di registri per uno scopo banale, per un obbiettivo scontato, per una competenza già formata”.*  
(D’Amore)

Ins supplente: “Prendiamo le scatole dei regoli...Mar, dammi 7...”

Mar: “Ecco” (consegna il regolo nero).

Ins supplente: (lo guarda, lo gira, lo rigira) “... Ma perché me ne hai dato uno solo?”

Mar: “Perché quello è il nero, è il 7”.

Ins supplente: “Questo è 7?” (Lo guarda, lo gira, rigira... ) “Ma io non vedo niente di 7, mi hai dato solo un pezzo di plastica nero... (Conta le facce del parallelepipedo) 1, 2, 3, 4, 5, 6... dov’è 7? Tu mi imbrogli, io ti avevo chiesto 7 e tu mi hai dato un pezzo solo”.

Val: “Ma quello è il 7!”

Classe: “È il 7”.

### Nel caso dei numeri in colore accade che...

l'insegnante propone agli allievi delle diverse rappresentazioni semiotiche del numero attraverso le caratteristiche più evidenti del *colore* (che chiaramente poco c'entra con la quantità) e della *misura* (che poco c'entra con la cardinalità).

*Ma tutte queste informazioni percettive, che nel contesto della Matematica sono avvertite come "parassite", potrebbero essere invece quelle considerate dall'allievo come caratterizzanti il concetto del quale si sta parlando, essendo più percepibili ed immediate.*

*"L'aggiunta di rappresentazioni nuove, addirittura innaturali (che cosa c'entrano i numeri con i colori e la grandezza?), su un argomento già costruito e formato non può certo aiutare chi sa già, ma solo confondergli le idee; né può aiutare chi non sa dato che, con molta probabilità, chi non sa, non sa proprio per confusione di registri semiotici".*

(D'Amore)

*E la trasformazione semiotica di conversione?*

Ins supplente: “Ma se ne vedo uno solo, perché dite che è 7?”

Gai: “Perché vedi? (Prende un regolo arancione con scritto in sequenza i numeri da 1 a 10, lo avvicina al regolo nero) vedi? È 7! Arriva fino qua! 7!”

Ins supplente: “Ah! È lungo fino al 7! Allora devo avere sempre con me questo regolo arancione con tutti questi numeri, per sapere quanto valgono i regoli...”.

Gai: “**Si!**”

Ins supplente: “E se io prendo questi (7 regoli neri, li conta a bassa voce, ma viene ascoltato...) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7... quanti ne ho?”

Val: “Ne hai 7”.

Ins supplente: “Anche prima con un solo regolo nero avevo 7?”

Classe: “**Si!**”

Ins supplente: (prende 1 regolo nero in una mano e i 7 regoli neri nell'altra): “**Dove ho 7?**”

Classe: “**Là!**” (Indicano la mano con i 7 regoli).

la trasformazione semiotica di *conversione* è la trasformazione più importante per l'acquisizione del concetto ma allo stesso tempo la più difficile per gli allievi, viene fortemente limitata da un materiale così strutturato che si fonda principalmente su fattori percettivi.

*“Le difficoltà nel passaggio da una rappresentazione in un registro ad una rappresentazione in un altro registro rivelano la complessità, troppo spesso sottostimata, dell’articolazione tra i registri di rappresentazione utilizzati in matematica”*

*Che cos'è così caratteristico dell'attività matematica, in confronto alle altre attività cognitive, da suscitare difficoltà di apprendimento più complesse che in altri campi?*

«La speciale situazione epistemologica della matematica, in confronto agli altri campi di conoscenza, conduce a conferire alle rappresentazioni semiotiche un ruolo fondamentale.  
 [...] **esse sono il solo modo di accesso agli oggetti matematici**»

