

Didattica della Matematica

21-24 aprile 2020
Prof.ssa Eliana Francot

π

A partire da tali caratteristiche comuni cerca di definire che cos'è un problema.

Il problema è la situazione in cui si trova un/a uomo/donna che desidera soddisfare un bisogno

un problema è un quesito a cui si cerca di dare una risposta per il superamento di una data difficoltà.

Nell'ambito di vita "comune" (ossia non matematica) per me problema significa prendere da decisione migliore in situazioni dove non si può essere certi che la scelta fatta sia al 100% quella "perfetta".

un problema è un quesito o una situazione in cui si chiede di trovare uno o più metodi di risoluzione e di calcolo, partendo da dati noti

Un problema è una situazione che presenta alcune difficoltà, di diversa entità o livello, da superare attuando un'opportuna strategia risolutiva.

Il problema è uno ostacolo che rende difficile raggiungere un determinato obiettivo.

A partire da tali caratteristiche comuni cerca di definire che cos'è un problema.

Problema: un'attività composta da diversi step per essere superata; se non c'è un'organizzazione il problema può diventare un "ostacolo".

Risolvere una qualche funzione implicita o esplicita. Esempio : trovare la funzione $f = \min(\text{tempo di percorrenza di un tragitto})$

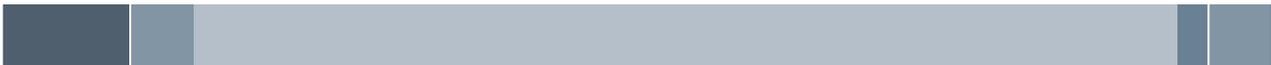
Un quesito o attivamento che richiede ragionamento per il suo superamento

Un problema è un quesito al quale si richiede di dare una risposta

Un problema è una difficoltà, un ostacolo, che si interpone nel corso dello svolgimento di azioni e che ne rallenta il normale corso

Un problema è una prova che richiede ragionamento, riflessione e deve tener conto anche di possibili errori

un problema è un quesito o un ostacolo che rende difficile raggiungere un obiettivo o soddisfare un bisogno.



Il Problem Solving nella Pratica Didattica



π

π

Psicologia della Gestalt



Pensiero
Produttivo

VS

Pensiero
Ri-produttivo

Ristrutturazione del problema

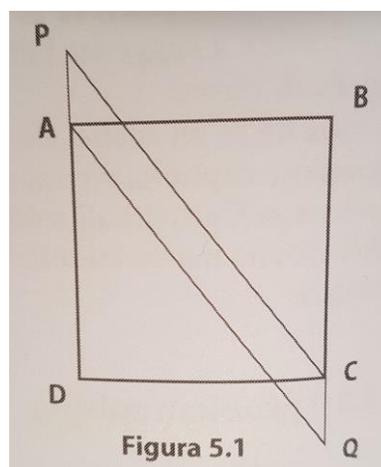
Trasformazione non puramente percettiva, ma consapevole e funzionale al problema stesso.

«Sia dato il quadrato $ABCD$ e si prolunghino i due lati AD e BC in modo che i due segmenti AP e CQ siano tra loro uguali. Sono note la lunghezza del lato del quadrato e la lunghezza dei due prolungamenti. Problema: trovare la somma delle aree del quadrato $ABCD$ e del parallelogramma $APCQ$ »

Segmento AB

Lato del quadrato

Altezza del parallelogramma



π

Psicologia della Gestalt

- ❖ Kohler (1921) Prime ricerche sull'intelligenza delle scimmie superiori
- ❖ Wertheimer (1959) nel testo *Productive Thinking* dedica interi capitoli a temi «matematici»
- ❖ Duncker (1935) nella sua opera *Zur Psychologie des produktiven Denken* analizza i processi risolutivi di problemi aritmetici e geometrici significativi

La matematica è considerata un contesto particolarmente significativo per studiare i processi tipici del Problem Solving

In che cosa consiste veramente la matematica? Assiomi (come il postulato delle parallele)? Teoremi (come il teorema fondamentale dell'algebra)? Dimostrazioni (come la dimostrazione di Gödel dell'indecidibilità)? Definizioni (come la definizione di dimensione di Menger)? Teorie (come la teoria delle categorie)? Formule (come la formula integrale di Cauchy)? Metodi (come il metodo delle approssimazioni successive)?

Certamente la matematica non potrebbe esistere senza questi ingredienti; essi sono tutti essenziali. Tuttavia un punto di vista sostenibile è che nessuno di essi è al centro della disciplina, che il motivo principale di esistenza per il matematico è risolvere problemi, e che, dunque, quello in cui consiste veramente la matematica sono problemi e soluzioni [Halmos, 1980, p. 519].

π

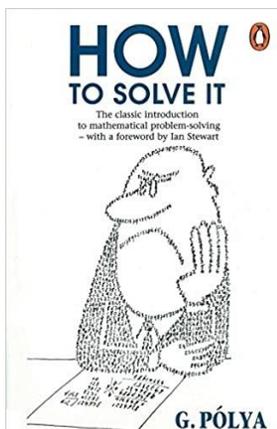
L'importanza dei problemi nell'attività dei matematici non si limita alla loro soluzione

Se l'apprendimento della matematica ha qualcosa a che fare con la scoperta matematica, bisogna dare allo studente qualche opportunità di fare problemi nei quali egli prima congetture e poi dimostra alcuni fatti matematici di livello adeguato (Polya 1954)

Questo libro non è una semplice collezione di problemi. La sua caratteristica più importante è l'organizzazione sistematica del materiale che vuole stimolare il lettore ad un lavoro indipendente e suggerirgli utili direzioni di pensiero.

[...] Trasmettere conoscenze di fatti per noi è di secondaria importanza. Quello che soprattutto vogliamo promuovere nel lettore è un atteggiamento corretto, una certa disciplina di pensiero, che sembrerebbe di più essenziale importanza in matematica che in altre discipline scientifiche.

[...] Piuttosto che conoscere teoricamente le corrette regole di pensiero, uno le deve aver assimilate nella propria carne e nel proprio sangue, pronte per un uso immediato e istintivo [Polya e Szegő, 1925, tr. ingl. pp. VI-VII].



Quindi un insegnante di matematica ha una grande possibilità. Ovviamente, se egli impiegherà le sue ore di lezione a far eseguire dei calcoli ai suoi studenti, finirà per soffocare il loro interesse, arrestare il loro sviluppo mentale e sciupare l'opportunità che gli si presenta. Invece, se risveglierà la curiosità degli alunni proponendo problemi di difficoltà proporzionate alle conoscenze della scolaresca e li aiuterà a risolvere le questioni proposte con domande opportune, egli saprà ispirare in loro il gusto di un ragionamento originale [Polya, 1945, tr. it. p. 7].

 π

Problem Solving nella pratica didattica

L'importanza data ai problemi nell'attività matematica e anche nella ricerca in educazione matematica non ha analogo riscontro nella pratica dell'insegnamento

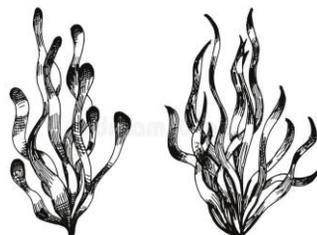
Problema



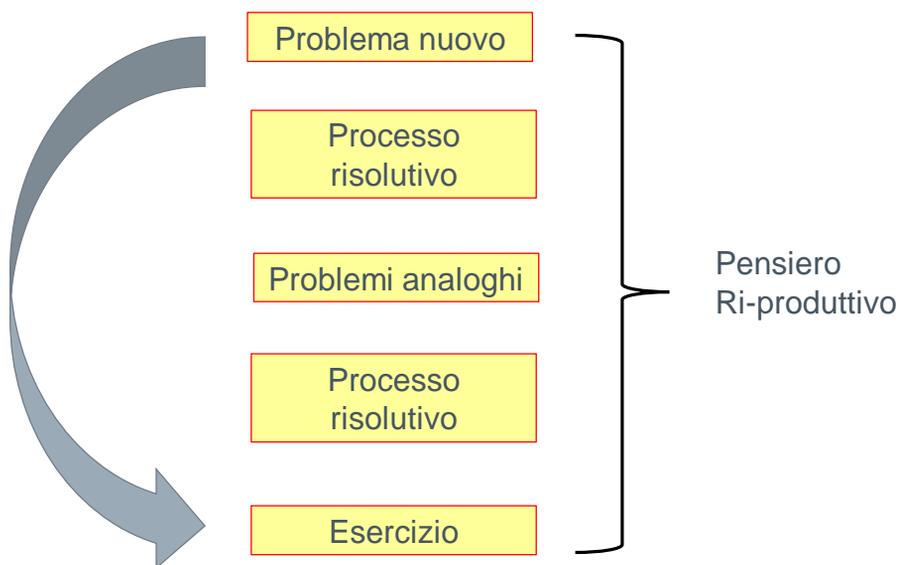
Etichetta di
Esercizio

π

Problem Solving nella pratica didattica

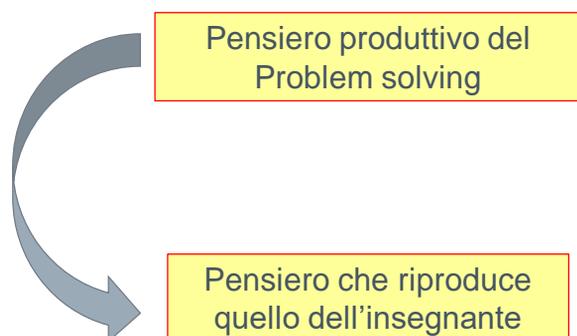


Di due piante acquatiche selvatiche il primo giorno una cresce 3 piedi e l'altra 1 piede. La crescita della prima ogni giorno dimezza rispetto al giorno precedente mentre l'altra raddoppia rispetto al giorno precedente. In quanti giorni le due piante raggiungeranno la stessa altezza?

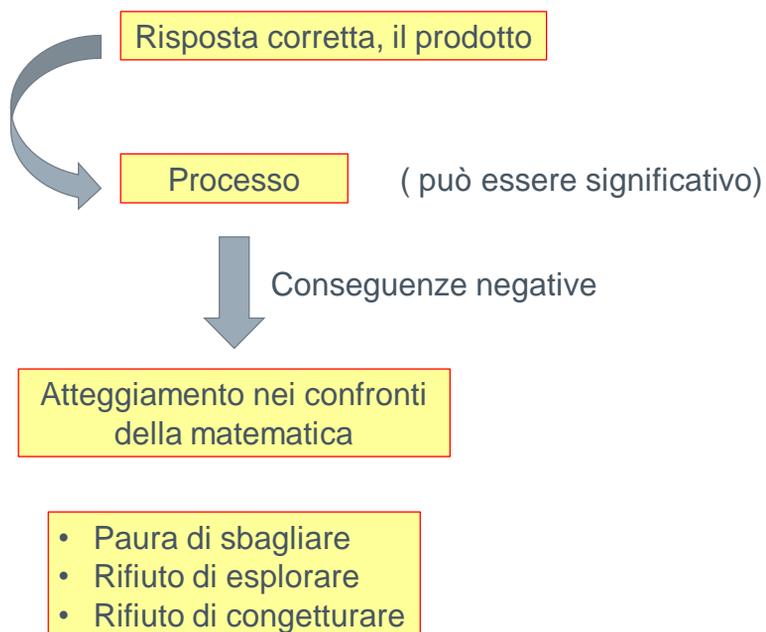


Come sono messi i problemi nei libri di testo?

Raccolti sotto il titolo del capitolo che sta ad indicare quali conoscenze e formule andranno utilizzate



Più importante



Attività di soluzione di problemi

Riproduzione di procedimenti

Consolidare conoscenze e abilità



La stessa parola descrive in realtà cose e attività completamente diverse!

π

Che cos'è un problema?



La definizione di problema

Un problema sorge quando un essere vivente ha una meta ma non sa come raggiungerla
Karl Duncker, 1935

 π

La definizione di problema

Un problema sorge quando un essere vivente ha una meta ma non sa come raggiungerla
Karl Duncker, 1935

 π

Esercizio - Problema

Riguardo gli esempi raccolti: li riconosci tutti come problemi? In caso negativo, perché?

si

Sono d'accordo con tutti ma escludo imparare a leggere, perché non lo considero un problema di vita quotidiana, ma un problema che si affronta in un certo periodo da bambini.

Dal mio punto di vista tutti possono essere considerati problemi a eccezione di "andare a lavoro" in quanto non capisco quale sia la base del problema, se ad esempio lo si intende da un punto di vista emotivo (soffrire d'ansia) può rientrare nell'ambito di un problema, in caso contrario direi di no.

Non tutti, per alcuni non è stata specificata la richiesta

Sì, credo che in maniera diversa possano costituire tutti un problema

si.

Si

Imparare a leggere, andare a lavoro cucinare e fare la spesa non sono per me problemi

cucinare non penso sia un problema. anche andare a lavoro.

Imparare a leggere non è un problema, ma è sviluppare una certa abilità, andare a lavoro, cucinare, fare la spesa sono semplici azioni

Stabilire la strada più breve per andare al supermercato, perché anche facendo quella più lunga ci si arriva lo stesso

Si

si

La definizione di problema

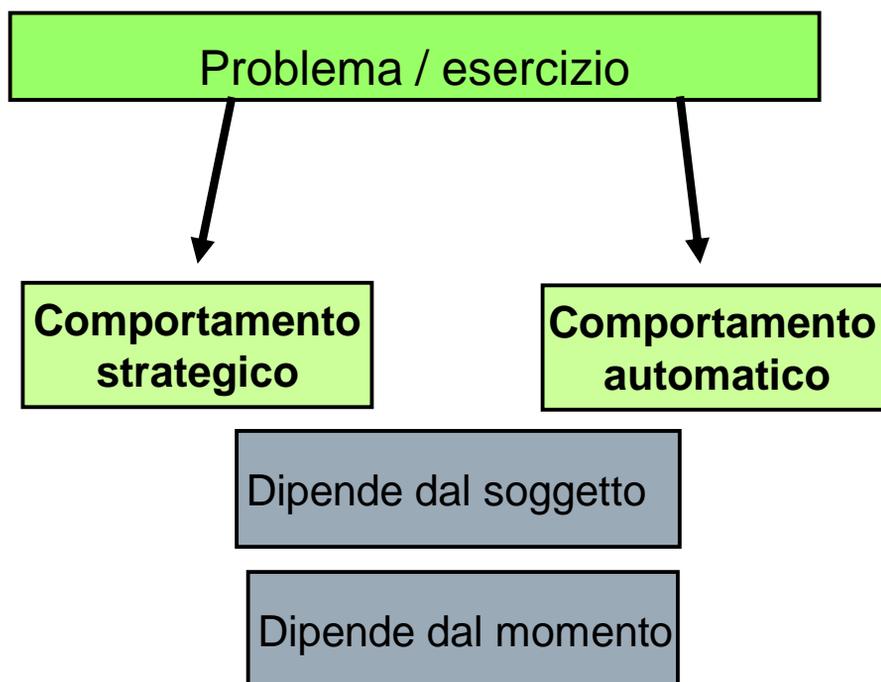
Un problema sorge quando un essere vivente ha una meta ma non sa come raggiungerla

Karl Duncker, 1935



π

Esercizio - Problema

π 

La definizione di problema

Un problema sorge quando un essere vivente ha una meta ma non sa come raggiungerla
Karl Duncker, 1935

 π

Quale meta?

- Il problema è uno ostacolo che rende difficile raggiungere un determinato obiettivo.
- un problema è un quesito o un ostacolo che rende difficile raggiungere un obiettivo o soddisfare un bisogno.

Aneddoto:

Von Neumann venne insistentemente sfidato a poker da un gruppo di giovani matematici.

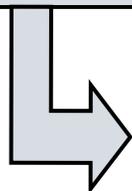
Accettò finalmente di giocare, ma fra lo sconcerto dei presenti, nel giro di mezz'ora aveva perso tutto il suo denaro, puntando come se non guardasse nemmeno le carte.

Finita così rapidamente la partita, si allontanò scusandosi. Gli altri giocatori rimasero a discutere il suo comportamento, senza riuscire a comprendere quali strategie avesse adottato.

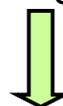
Finalmente uno di essi trovò la soluzione: «Ecco! Lui non ha cercato di massimizzare il suo denaro, ma di minimizzare il suo tempo!»

π

“Un problema sorge quando un essere vivente ha una meta ma non sa come raggiungerla”



se il soggetto non raggiunge la meta



FALLIMENTO



per *quel* soggetto
rispetto a *quella* meta
in *quel* momento

Nel caso di «Problema» si tratta di un termine «tecnico»

Volevo prendere 8 alla verifica

Ho preso 7

FALLIMENTO

Ho preso 5

SUCCESSO

Volevo prendere
più di 4 alla verifica

π

Attività 2: meta

Pensando agli esempi iniziali di problema che sono stati discussi:

1. Rientrano nella definizione di problema di Duncker?
2. In caso affermativo, a quale “meta” si fa riferimento?

Supponiamo di aver proposto ai nostri allievi questo problema:

«In un triangolo rettangolo ABC i cateti AB e AC misurano 3cm e 4cm. Quanto misura l'ipotenusa?»

Luca: L'ipotenusa misura 5cm

Martina: $\overline{BC} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{35} = 5,9cm$

- Se tu fossi un insegnante, a quale compito daresti una valutazione migliore? A quello di Luca o a quello di Martina?
- Perché?

Supponiamo di esplicitare la richiesta:

«In un triangolo rettangolo ABC i cateti AB e AC misurano 3cm e 4cm. **Quanto misura l'ipotenusa BC? Spiega quale procedimento hai seguito**»

La risposta di Martina contiene già la spiegazione:

Luca: L'ipotenusa misura 5cm

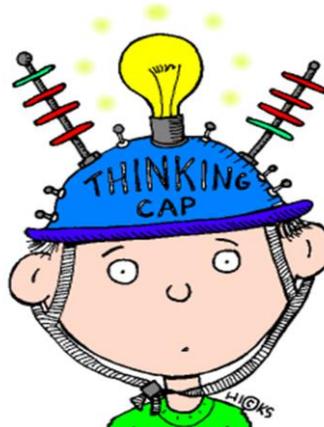
Per trovare questo risultato ho chiesto al mio amico Giacomo

π Si fa problem solving a scuola?

In particolare:

Si fa problem solving attraverso l'attività usuale di soluzione di problemi?

No!



π

PROBLEMA
SCOLASTICO



Carlo compra 1 quaderno e due penne
spendendo in tutto 2€. Se una penna
costa 0,6€, quanto costa il quaderno?

PROBLEMA
REALE



Torno a casa e mi accorgo
di non avere le chiavi

non è una situazione problematica!

Carlo compra 1 quaderno e due penne
spendendo in tutto 2€. Se una penna
costa 0,6€, quanto costa il quaderno?

Andrea deve comprare un quaderno ma non può andare in cartoleria.

Chiede allora a Carlo di comprarglielo.

Carlo però oltre al quaderno per Andrea compra per sé due penne da 0,6 € l'una.

Spende in tutto 2 €.

Quando Andrea gli chiede: 'Quanto ti devo dare per il mio quaderno?', Carlo non sa cosa rispondere.

Come può fare Carlo a sapere quanto costa il quaderno di Andrea?

π

I PROBLEMI VERBALI

- Hanno una tradizione molto forte
- Hanno una diffusione molto vasta
- In tutti i paesi i processi risolutivi messi in atto dagli allievi fanno osservare comportamenti «patologici», in particolare un'apparente mancanza di «razionalità»

ISRAELE

Quale sarà la temperatura dell'acqua in un recipiente se metto insieme una caraffa d'acqua a 10° gradi ed una a 40° ?

$$10^{\circ} + 40^{\circ} = 50^{\circ}$$

Il signor Lorenz e tre colleghi partono per Bielefeld alle 9 e viaggiano per 360km fino a Francoforte, con una sosta di 30 minuti.

GERMANIA

I bambini delle *ultime* classi 'rispondono' ...

STATI
UNITI

Un camion dell' esercito può portare 36 soldati. Se bisogna trasportare 1128 soldati alla loro base, quanti camion servono?

45.000 studenti
"31 col resto di 12" (29%)
"31" (18%)

Su un battello ci sono 36 pecore.
10 muoiono affogate.
Quanti anni ha il capitano?

FRANCIA

...i bambini «rispondono»!!!!

Il miglior tempo di John nel correre
i 100 m è di 17 secondi.
Quanto tempo impiegherà a correre
1 chilometro?

BELGIO

- Più del 95% delle risposte:
 $17 \times 10 = 170$ secondi
- 3% sono risposte «realistiche»:
 - È impossibile rispondere con precisione
 - Circa 3 minuti e mezzo
 - Sicuramente più di 170 secondi

π

PROBLEMA SCOLASTICO

Sono elencati tutti (e soli) i dati che servono

L'esplicitazione dell'obiettivo da raggiungere è in fondo: la DOMANDA

Si devono risolvere problemi per qualcuno che ne conosce la soluzione

Bastano pochi minuti per risolverlo

Non si può interagire con la realtà

Bisogna utilizzare le ultime conoscenze apprese di matematica

Ci sono dati numerici, e sono 'belli'

PROBLEMA REALE

L'individuazione dei dati è a carico del solutore

L'esplicitazione dell'obiettivo da raggiungere è implicita, o è all'inizio

Si affrontano in genere problemi che non sono già stati risolti

Non è detto che si possa risolvere, e quanto tempo ci vuole

C'è un'interazione continua con la realtà

Non si sa a priori quali tipi di risorse dovranno essere utilizzate

Se ci sono dati numerici, non sono necessariamente 'belli'

 π

PROBLEMA SCOLASTICO

Sono elencati tutti (e soli) i dati che servono.

L'esplicitazione dell'obiettivo da raggiungere è in fondo: la DOMANDA

Si devono risolvere problemi per qualcuno che ne conosce la soluzione

Bastano pochi minuti per risolverlo.

Non si può interagire con la realtà.

Bisogna utilizzare le ultime conoscenze apprese di matematica.

Ci sono dati numerici, e «belli»

TESTO

SCELTE DIDATTICHE
...DELL' INSEGNANTE

Al supermercato ci sono 5 sacchetti. Ogni sacchetto contiene 8 patate.
Quante patate sono in tutto?



patate $8 \ 8 \ 8 \ 8 \ 8 \ ? \ 40$
 $8 \times 5 = 40$
 Sono 40 patate.

Il fruttivendolo ha preparato
3 sacchetti.

In ogni sacchetto ci sono
6 mele.
Quante mele sono
in tutto?



mele $3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3 \ ? \ 18$
 $3 \times 6 = 18$
 Sono 18 mele

Ho preso 4 sacchetti. In ogni sacchetto ho messo 3 bottiglie.
Quante bottiglie sono?



bottiglie $4 \ 4 \ 4 \ ? \ 12$
 $4 \times 3 = 12$
 Sono 12 bottiglie ok

Il fornaio ha preparato 8 sacchetti.
In ogni sacchetto ha messo 2 pizzette.
Quante pizzette sono in tutto?



pizzette $2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ ? \ 16$
 $2 \times 8 = 16$
 Le pizzette sono 16.

Problemi reali e problemi scolastici verbali
sono molto diversi rispetto ad alcune
caratteristiche

... ed in effetti i bambini «vedono»
problemi reali e problemi scolastici come
due mondi separati

π

Scriviamo più o meno “la signora Pina ha lasciato il rubinetto aperto. Se fuoriescono 2 metri cubi di acqua l’ora, quante ore occorrono per allagare il suo appartamento di 400 metri cubi?” Povera signora Pina! Spero per lei che abbia chiuso quel rubinetto prima di farsi sommergere! [3S]

“c’è un problema addosso alla gente e c’è un problema che si fa sul quaderno” [4P]

Gli esempi fatti dai bambini...

Su di un ’autobus salgono 738 persone...

La mamma ha comprato una fetta di pane costa L 4000 il fornai gli fa lo sconto del 1%. Quanto spende?

In un parco ci sono 45 ochette.

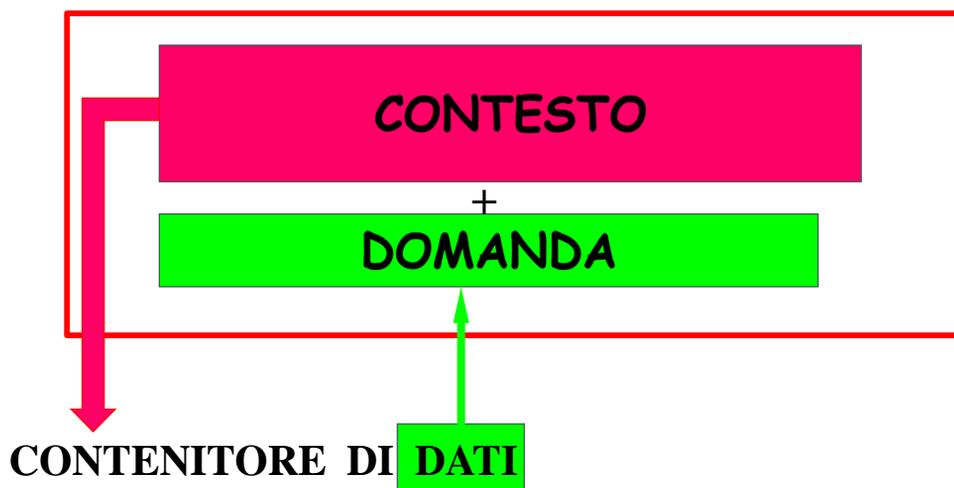
Ogni giorno il guardiano distribuisce per ogni ochetta 9 briciole di pane.

Quante briciole mangeranno in una settimana?

Al Lunapark, per entrare volevano L 50.000 più i soldi del bruco, che volevano L 66.000 per 10 giri. Quanto devo spendere?

PROBLEMA

Su un battello ci sono 36 pecore.
10 muoiono affogate.
+
Quanti anni ha il capitano?

CONTENITORE DI DATI**...i bambini rispondono!****PROBLEMA****...i bambini rispondono!**

π

Nel risolvere un problema scolastico molti bambini sembrano procedere *combinando numeri*:

- › secondo strategie suggerite da parole presenti nel testo
- › secondo schemi risolutivi interiorizzati nella loro precedente esperienza scolastica
- › a caso

 π

Sembra mancare:

- › controllo sulle strategie
- › controllo sui risultati
- › un'effettiva ricostruzione della situazione problematica

π

RIPENSARE L'ATTIVITÀ DI PROBLEM SOLVING

Ripensare il problem solving in classe

 π

Il ruolo degli errori



**L'idea di successo:
da risposta corretta
a processi di pensiero significativi**



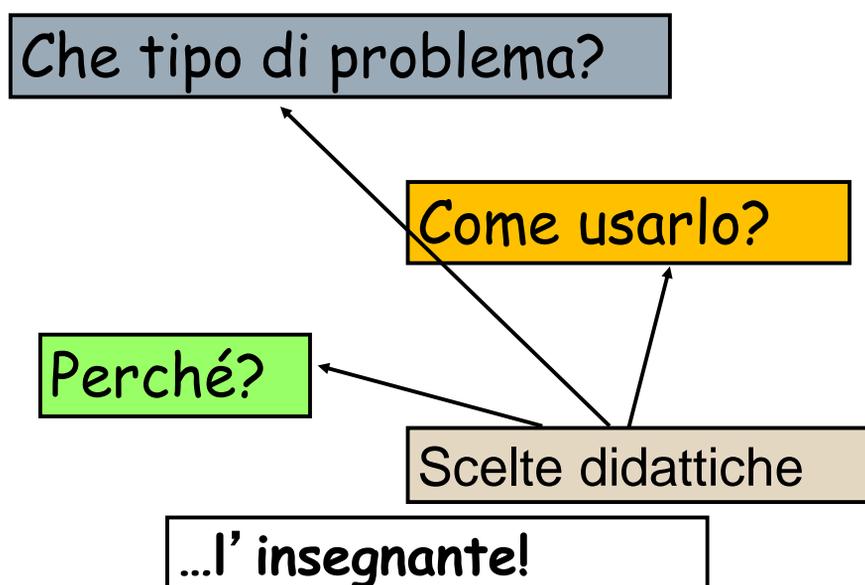
Il ruolo dell'insegnante

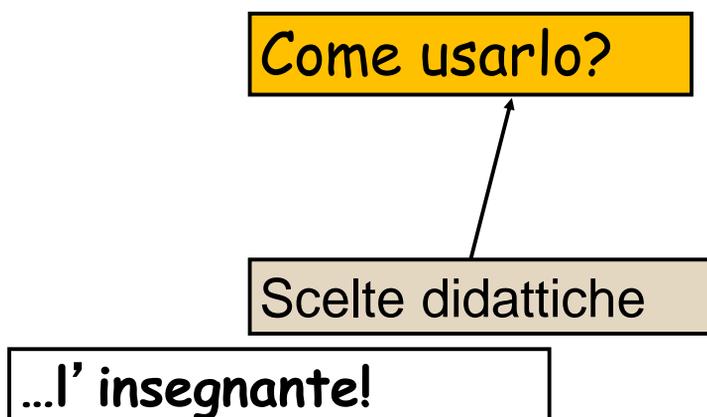
π L' insegnante:

- › Non corregge eventuali errori
- › Non suggerisce la risposta corretta

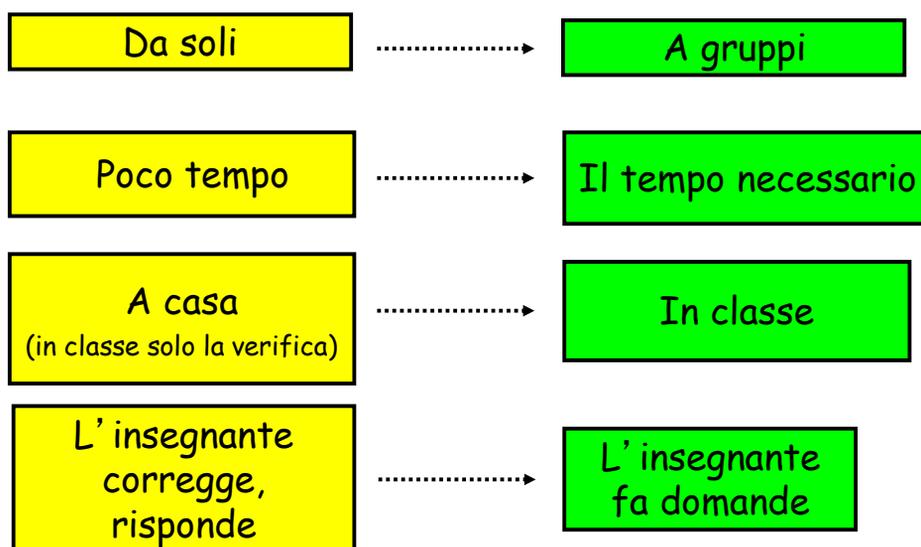
Ma...

- › Fa domande per stimolare processi di pensiero:
 - ✓ Cosa avete fatto?
 - ✓ Cosa state facendo?
 - ✓ Cosa pensate di fare?
- › Utilizza le potenzialità della «comunità di pratica» per:
 - ✓ Sottolineare le varietà dei processi possibili
 - ✓ Sviluppare abilità di argomentazione
 - ✓ Negoziare significati





MODALITA' D'USO

 π 

Che tipo di problema?

Scelte didattiche

...l'insegnante!

LA STRUTTURA MATEMATICA

π

Si devono utilizzare
conoscenze apprese
di recente

Non si sa a priori
quali conoscenze
vanno utilizzate

C'è una e una sola
soluzione

Ci possono essere
più soluzioni, o anche
nessuna

Si devono combinare
con operazioni tutti e soli
i dati numerici presenti

I dati non è detto
siano solo numerici.
Non è detto che
ci vogliano operazioni.

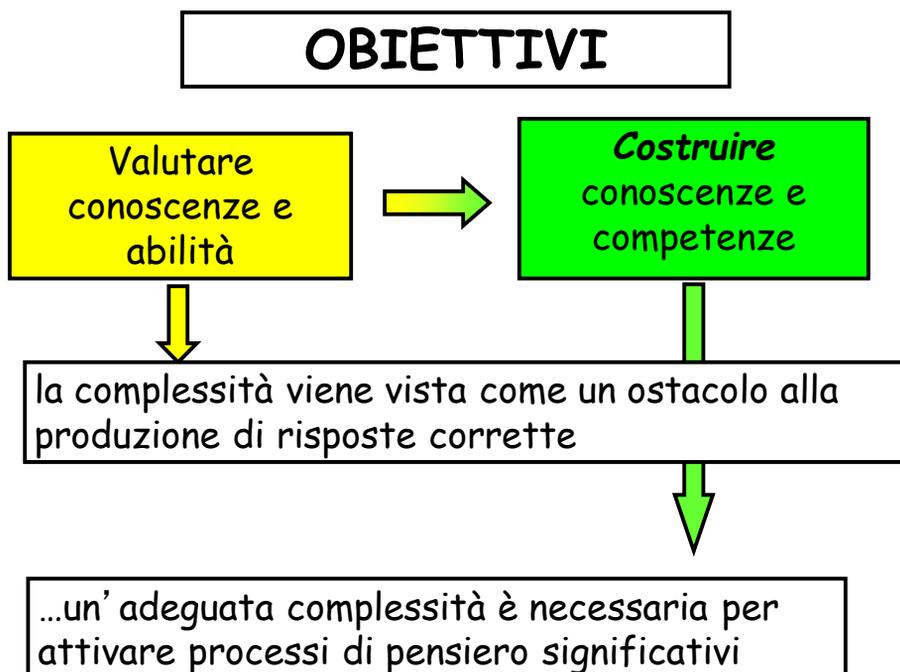
Perché?

Scelte didattiche

...l'insegnante!

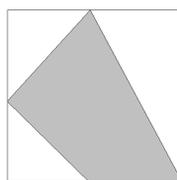
π Perché fare problem solving

- › Sviluppa abilità metacognitive
- › Sviluppa:
 - ✓ la capacità di prendere decisioni
 - ✓ l'assunzione della responsabilità dei propri processi di pensiero
- › Favorisce la costruzione del senso di auto-efficacia
- › Favorisce una visione delle discipline come discipline vive, di processi più che di prodotti

π 

Problema: Il giardino del signor Torquato

Questo è il giardino del signor Torquato:



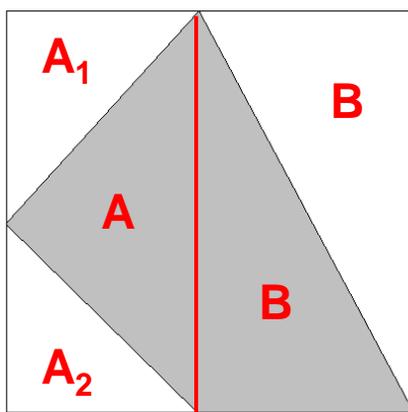
Nella parte grigia egli ha piantato fiori e ha seminato a prato la parte bianca.

Il signor Torquato osserva il suo giardino e si chiede:

“Sarà maggiore la parte con i fiori o quella con il prato?”

E voi che cosa ne pensate?

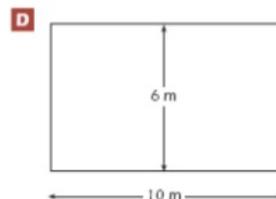
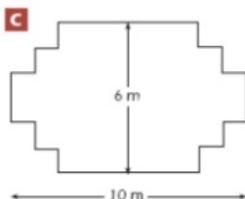
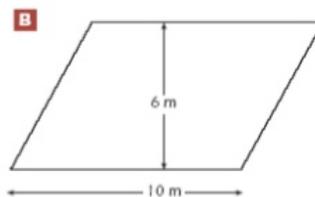
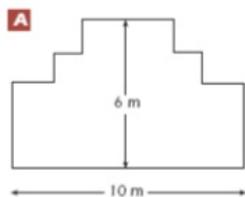
Spiegate la vostra risposta.



“Sarà maggiore la parte con i fiori o quella con il prato?”

Esempio: Problema del carpentiere (Pisa 2003)

Un carpentiere ha 32 metri di tavole. Quali di questi recinti può realizzare?



π

OBIETTIVI

Promuovere un approccio problem solving

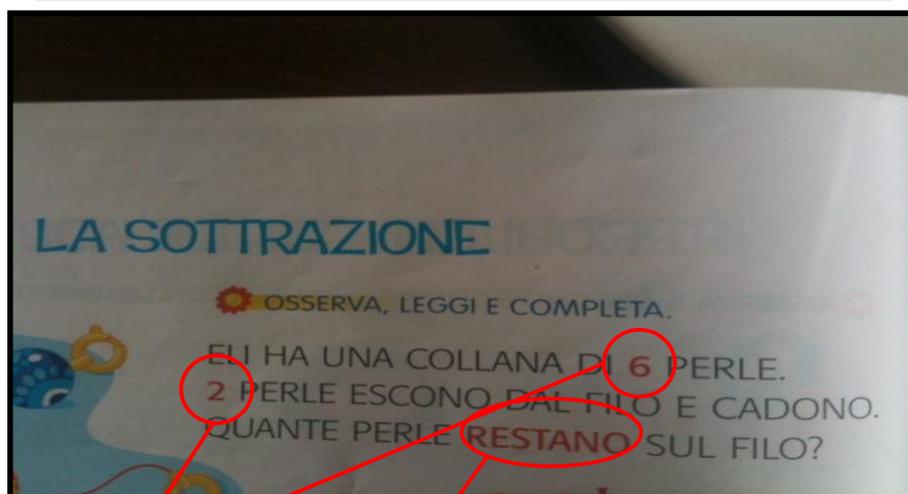
Gli strumenti vanno introdotti dopo che l'allievo si è scontrato con la difficoltà di risolvere certi problemi



Ciò può contribuire a **dare un senso** all'attività matematica: certi strumenti nascono per una esigenza (che può essere pratica, ma anche teorica)

 π

La sottrazione: prima elementare



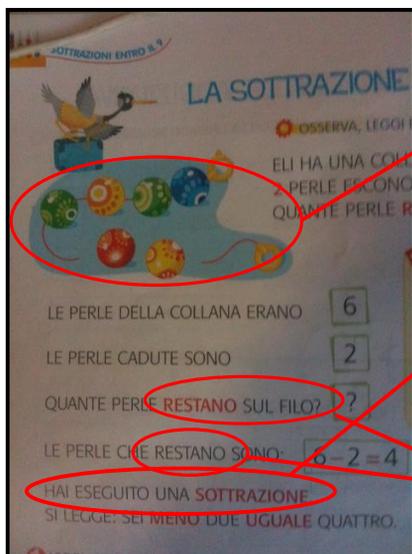
Dati
numerici

Parole
chiave

Lettura selettiva del
testo

π

La sottrazione: prima elementare



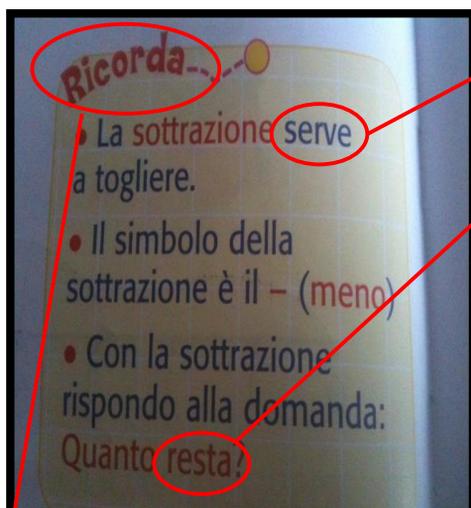
La sottrazione non è presentata come strumento significativo ma come codifica: il bambino può contare...e infatti conta!

Il bambino ha tutto il diritto di sentirsi disorientato lui ha semplicemente contato

Unica particolarità la parola chiave «restano», tra l'altro con alcune criticità...

π

La sottrazione: prima elementare



In realtà al bambino NON è servita a nulla: lui ha contato!

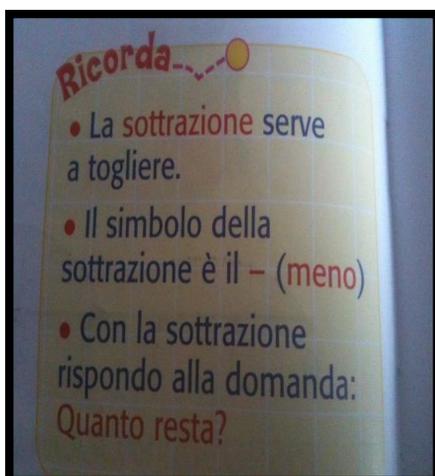
Si lega lo strumento ad una parola chiave...

Cecilia aiuta ad apparecchiare: tutte le sere prende i 5 piatti per la famiglia. Oggi mamma le dice: 'stasera **restano** anche nonno e nonna'. Quanti piatti deve prendere Cecilia stasera?

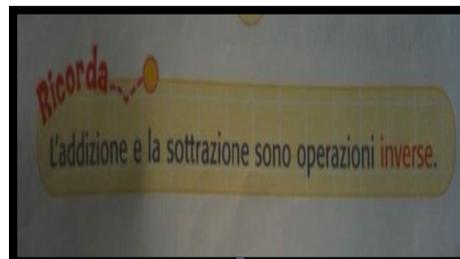
Si deve ricordare «a cosa serve» qualcosa?!?

π

La sottrazione: prima elementare



Quale sarà il senso di ciò per gli allievi?



Si chiede di ricordare un concetto molto sofisticato, e probabilmente si pensa che i bambini non possano capire...infatti non si definisce, si nominalizza e basta

π

La sottrazione: prima elementare

Anche i problemi seguenti sono tutti dello stesso tipo: il disegno facilita la risposta corretta, ma devia completamente dal processo che si vorrebbe introdurre!

π

La sottrazione: prima elementare

SOTTRAZIONI ENTRO 9-9

PROBLEMI CON LE SOTTRAZIONI

OSSERVA IL DISEGNO E COMPLETA. AIUTATI CON LA LINEA DEI NUMERI.

AQUILONI IN TUTTO

AQUILONI ATERRATI

AQUILONI RIMASTI IN CIELO?

$8 - 3 = 6$

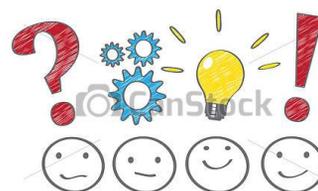
RISPOSTA: SONO RIMASTI IN CIELO 5 AQUILONI.

1 LEGGI E RISOLVI.

Anche i problemi seguenti sono tutti dello stesso tipo: il disegno facilita la risposta corretta, ma devia completamente dal processo che si vorrebbe introdurre!

π

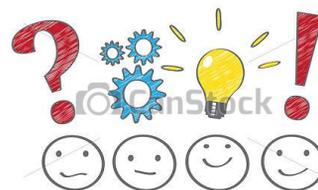
Situazione Problema



- Il docente introduce motivazione, suscita curiosità per un qualche enigma, per una domanda, per un problema;
- l'allievo sa di essere in una situazione nella quale è prevista la costruzione di una conoscenza;
- la struttura del compito permette a ciascun allievo di effettuare le operazioni mentali richieste per raggiungere l'obiettivo dell'apprendimento;
- l'allievo è valutato in base alle sue acquisizioni personali.

π

Situazione Problema

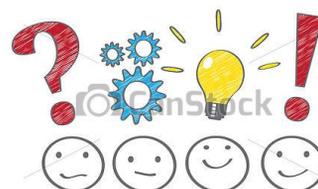


Per creare *situazioni problema* l'insegnante deve:

- avere un obiettivo ben preciso all'interno di un progetto ben delineato e chiaro;
- conoscere gli allievi: le competenze reali, possibilità creative, come motivarli, le loro esigenze...;
- avere chiare le operazioni mentali che tale operazione richiederà per poterle riconoscere nelle attività degli studenti e guidarle.

 π

Situazione Problema



Si ha dunque uno strano paradosso

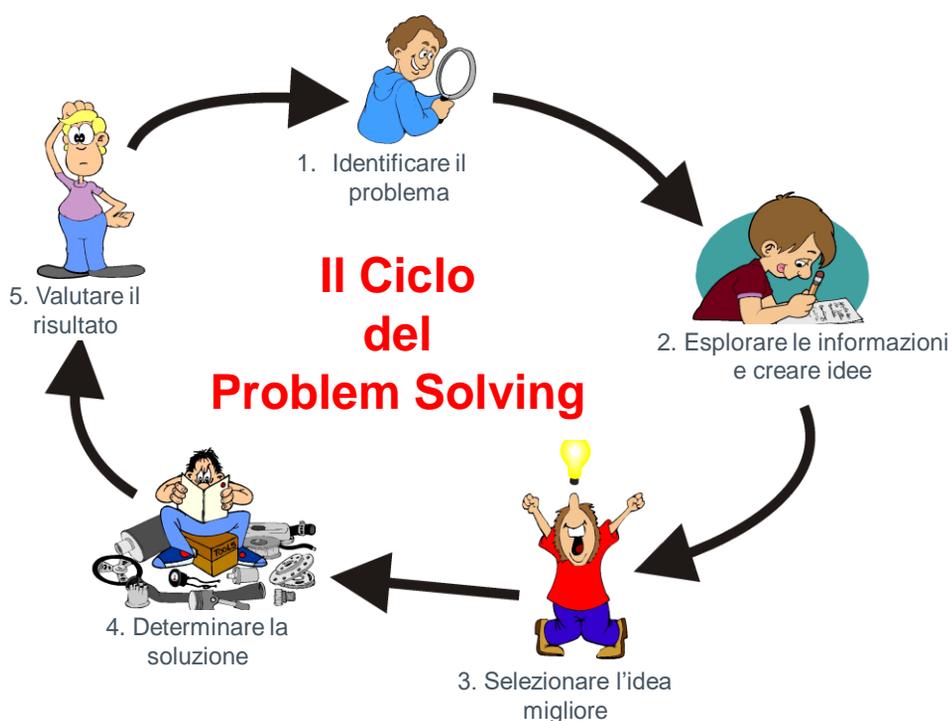
Per l'insegnante:

è necessario che l'attività sia *fortemente strutturata*, prevista in ogni dettaglio metodologico e contenutistico

L'allievo:

deve sentirsi *libero* di far uso delle proprie risorse mentali, anche a prescindere da conoscenze previe

E nel caso di studenti con DSA?

 π  π

π

Il **Problem Solving** non riguarda solo le discipline scientifiche e può essere attuato in ogni ordine di scuola, purché si pongano problemi adeguati al grado di comprensione degli allievi, in situazioni reali o verosimili.



› **Italiano** (per la risoluzione di un giallo o la scrittura di un testo),



› **Scienze** (attraverso la conduzione di esperimenti in laboratorio),



π

Storia (ponendo una controversia da analizzare, ricostruendo i processi che hanno dato vita ad alcune grandi vittorie o sconfitte)

 π

Gli ostacoli che spesso gli studenti con *disturbo di apprendimento* incontrano nella risoluzione di problemi matematici possono essere dovuti a difficoltà nella lettura e comprensione del testo o nel calcolo, o a una combinazione dei due fattori.

TUTTAVIA

Imparare a risolvere i problemi matematici è fondamentale per il funzionamento nella vita di ogni giorno e per poter lavorare in una società tecnologicamente avanzata.

π **Esempio: Verifica di Matematica***Liceo Scientifico2^A*

Risolvi i seguenti sistemi lineari applicando almeno una volta tutti i metodi di risoluzione che abbiamo considerato

- Richiesta perentoria di applicare algoritmi differenti
- Calcoli algebrici complessi (quadrato di un binomio, m.c.m.)
- Vincola l'alunno ad adottare le strategie proposte dall'insegnante

$$\begin{cases} x(y-x) + 2y = -3 - x^2 + y(x+4) \\ 2x + 2(x-y) = 3x - 2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{x-2y}{2} + \frac{(x-2)^2}{6} = +2y + \frac{x^2}{6} \\ \frac{x+y}{3} = x-y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2}{x-1} - \frac{1}{y+1} = -2 \\ -\frac{1}{x-1} + \frac{2}{y+1} = 3 \end{cases}$$

Il metodo e l'intuizione.

Problema. Si risolva il seguente sistema di equazioni lineari nelle incognite x, y, z .

$$\begin{cases} -x + y + 2z = 0 \\ 3x + y + 5z = 0 \\ 2x - 2y + 5z = 0 \end{cases}$$

Soluzione alternativa:

Si può notare che la I e la III equazione possono essere combinate tra loro per semplificare i conti

$$\begin{cases} -x + y + 2z = 0 \\ 3x + y + 5z = 0 \\ 2x - 2y + 5 = 0 \end{cases}$$

Sostituiamo alla III equazione la somma della III con la I moltiplicata per 2 ottenendo

$$\begin{cases} -x + y + 2z = 0 \\ 3x + y + 5z = 0 \\ 4z + 5 = 0 \end{cases}$$

Dopo aver determinato z , il sistema si riduce ad uno di 2 equazioni in 2 incognite, più consueto per gli studenti

Problema. Dato il sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y - z = 2 \end{cases}$$

dire quale delle seguenti equazioni aggiunta al sistema fornisce un sistema che ha un'unica soluzione.

1. $-x - y - z = -1$.
2. $2x - 2y - 2z = 4$.
3. $2x = 3$.
4. $y - z = 1$.
5. $2y + 2z = -1$.

Soluzione

Lo studente potrebbe essere tentato dalla strategia più semplice: per ogni equazione proposta, calcolare le soluzioni del sistema ottenuto aggiungendo la stessa alle due equazioni date.

Tuttavia è molto più efficiente usare le proprietà dei sistemi di equazioni lineari.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y - z = 2 \end{cases}$$

1. $-x - y - z = -1.$
2. $2x - 2y - 2z = 4.$
3. $2x = 3.$
4. $y - z = 1.$
5. $2y + 2z = -1.$

- La prima soluzione proposta fornisce un sistema lineare con infinite soluzioni in quanto l'equazione è l'opposto della prima equazione del sistema dato, quindi non fornisce contributo alla soluzione del sistema.
- La seconda soluzione si comporta allo stesso modo perché è il doppio della seconda equazione del sistema dato.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y - z = 2 \end{cases}$$

1. $-x - y - z = -1.$
2. $2x - 2y - 2z = 4.$
3. $2x = 3.$
4. $y - z = 1.$
5. $2y + 2z = -1.$

• calcolando la differenza tra la I equazione e la II, si ottiene l'equazione

$$2y + 2z = -1$$

che è uguale alla quinta soluzione proposta

• analogamente, calcolando la somma delle due equazioni proposte si ottiene la soluzione 3.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y - z = 2 \end{cases}$$

$$1. -x - y - z = -1.$$

$$2. 2x - 2y - 2z = 4.$$

$$3. 2x = 3.$$

$$4. y - z = 1.$$

$$5. 2y + 2z = -1.$$

Problema. Dato il sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y - z = 2 \end{cases}$$

dire quale delle seguenti equazioni aggiunta al sistema fornisce un sistema che ha un'unica soluzione.

$$1. -x - y - z = -1.$$

$$2. 2x - 2y - 2z = 4.$$

$$3. 2x = 3.$$

$$\mathbf{X} \quad y - z = 1.$$

$$5. 2y + 2z = -1.$$

Lo studente con DSA può dare la risposta corretta, dimostrando di conoscere i sistemi lineari, senza «passare» dal calcolo

π

Problema. Il quoziente tra il polinomio $x^5 + x^4 + x^3 - x$ e il polinomio $x^2 + x$ è

1. $-x^3 + x - 1.$

X $x^3 + x - 1.$

3. $x^4 - 4.$

4. $x + 4.$

5. $x^2 - x + 1.$

La strategia: svolgere la divisione fino ad arrivare alla risposta corretta

Il strategia: utilizzare le proprietà della divisione

- ✓ il quoziente deve essere di 3° grado
- ✓ Il segno del quoziente tra i due termini di grado massimo del polinomio dividendo e del polinomio divisore è +

 π

L'apprendimento della matematica è da sempre ritenuto complesso.

Le difficoltà di un alunno con DSA

- difficoltà di acquisizione delle procedure e degli algoritmi del calcolo,
- errori nel processamento numerico,
- non adeguata organizzazione temporale dei fatti aritmetici, ecc

spesso si sommano a quelle intrinseche della materia.

In matematica è importante adottare delle *verifiche* che prediligano processi di soluzione orientati alla scoperta, in un'ottica metodologica di Problem solving.

π

Approfondimenti

- Maria Chiara Passolunghi *Apprendimento matematico: competenza e disabilità nella soluzione dei problemi* Difficoltà in Matematica 1 (1), 27-39 (2004)