

Didattica della Matematica

13 marzo 2020
Prof.ssa Eliana Francot

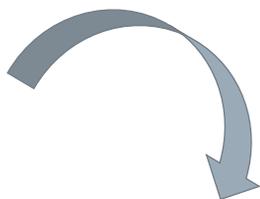
π

π

Quali contenuti?

della *disciplina d*,
stabiliti da essa
stessa, dalla sua
storia

Disciplina

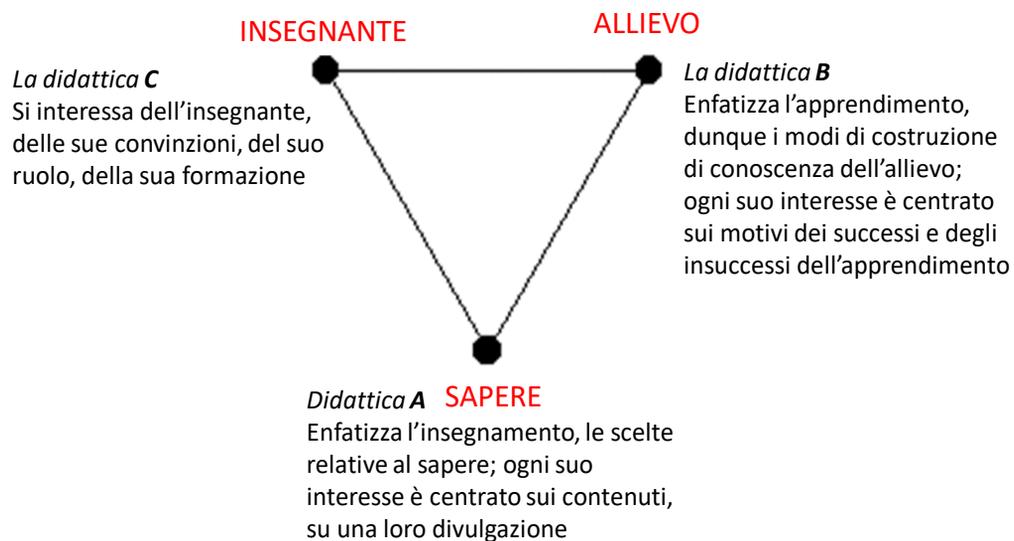


della *didattica di
quella disciplina*,
diciamo per
intenderci D_d

Didattica della Disciplina

di un'altra teoria più
generale che si
pone il problema di
*come passare dai
contenuti di d ai
contenuti di D_d*

Didattica Generale

 π

Didattica della Matematica (Mathematics Education)



SCIENZA

π Didattica della Matematica

DIDATTICA DELLA MATEMATICA

Ha tutte le caratteristiche per poter essere considerata una scienza consolidata e stabile

Teoria a sé stante che può contribuire allo sviluppo di un'altra teoria

DIDATTICA GENERALE

π Didattica della Matematica

E' sotto gli occhi di tutti l'esistenza di un folto gruppo internazionale di ricercatori in didattica della matematica che:

- hanno interessi comuni.
- Per i quali esistono problematiche considerate centrali e condivise.
- Che danno, da diversi decenni, spiegazioni di carattere causale.
- Che hanno elaborato un vocabolario comune condiviso.
- Hanno loro convegni specifici e loro riviste specifiche.
- Vagliano le proposte di comunicazione o di pubblicazione in base a procedimenti oramai ampiamente condivisi.

π

Ricerca in Didattica della Matematica: scopi

Schoenfeld (2000): la ricerca in didattica della matematica ha due scopi principali:

Puro

Studio che può essere affrontato da un punto di vista:

- Epistemologico
- Cognitivo
- Didattico

Applicato

Quando la conoscenza generata è usata per migliorare la qualità dell'educazione matematica

 π

Ricerca in Didattica della Matematica: risultati possibili

La conoscenza che un soggetto può avere di un determinato sapere matematico dipende fortemente dalle circostanze nelle quali ha avuto l'occasione di entrare in contatto con quel sapere e utilizzarlo

D'Amore (2007):

1. Conclusioni, modelli calzanti rispetto ad un campo di esperienze ampio all'interno del contesto che si sta discutendo
2. Esperienze che contraddicono (o richiedono il raffinamento di) modelli o convinzioni esistenti.

Il graduale abbandono della convinzione che nell'apprendimento e insegnamento della matematica entrino in gioco fattori esclusivamente cognitivi

π Teorie Comportamentiste



I. Pavlov
1849 - 1936

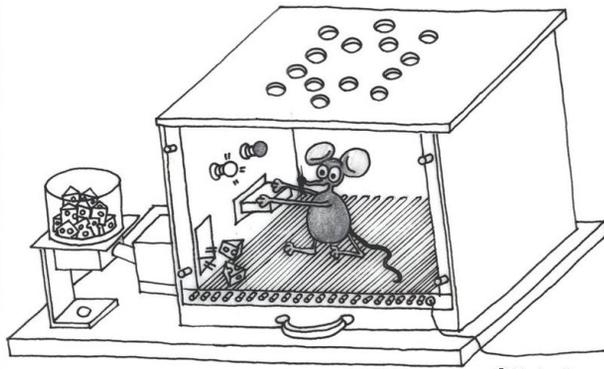
L'esperienza di Pavlov





B. Skinner
1904 - 1990

Condizionamento operante (o skinneriano)

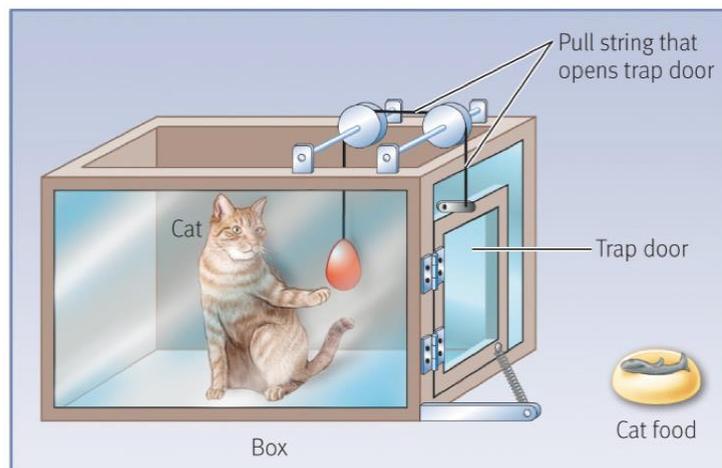


«Il soggetto agisce e continuerà ad agire in funzione della conseguenza che riceve»



E. Thorndike
1874 - 1949

Apprendimento e ricompense



Il gatto apprendeva la maniera di uscire registrando le risposte giuste e cancellando quelle sbagliate.



E. Thorndike
1874 - 1949

Leggi dell'apprendimento

- ❖ La *legge dell'effetto*, cioè la tendenza ad attivare e ripetere un comportamento dipende dall'effetto (la conseguenza) del comportamento stesso;
- ❖ La *legge dell'esercizio*, per cui l'apprendimento è graduale e migliora con la ripetizione delle prove e si indebolisce quando l'addestramento cala;
- ❖ La *legge del trasferimento*, per cui una risposta acquisita a seguito di uno stimolo, tenderà ad essere ripetuta in situazioni con stimoli diversi, ma simili a quello originale.

π Teorie Comportamentiste

Ciò che viene appreso è una copia dello stimolo presentato e pertanto l'apprendimento può essere

- da una parte misurato confrontando il comportamento acquisito dopo la situazione di apprendimento con quello presente precedentemente
- dall'altro può essere valutato secondo i criteri della quantità e dell'accuratezza della performance.



π

Teorie Comportamentiste

I sistemi di istruzione e di insegnamento che si fondano su di una visione comportamentista dell'apprendimento si concentrano sul condizionamento del comportamento del discente:

l'insegnante manipola i cambiamenti di comportamento utilizzando rinforzi selettivi.

All'insegnante spetta il ruolo di determinare le abilità/capacità che portano al comportamento desiderato e assicurarsi che gli studenti se ne impossessino in modo graduale.

(Roblyer, Edwards, Havriluk, 1997)

 π

Teorie Comportamentiste

Il modello di istruzione definito come

“Modello della Trasmissione”

trova fondamento nelle teorie comportamentiste

Barak Rosenshine descrive in dettaglio alcune funzioni di insegnamento importanti per il modello:

- esame giornaliero,
- pratica guidata,
- correzioni e feedback,
- pratica indipendente,
- esami settimanali e mensili.

π

Modello trasmissivo

- apprendimento riproduttivo;
- buoni risultati per l'insegnamento dell'applicazione di procedure algoritmiche;
- assolutamente inadeguato per lavorare su competenze di natura produttiva come il problem solving;
- il discente viene visto come una scatola vuota da riempire;
- la variabile «discente» influisce solo relativamente alla capacità ricettiva della scatola da riempire.

 π 

- 1950: esclusione del pensiero dallo studio e dalla modellizzazione dell'apprendimento
- Perché le persone danno senso alle informazioni che immagazzinano o spesso ne alterano la forma e la sostanza?

π

Comportamentismo e Cognitivismo: punti di contatto

- Lo studio dell'apprendimento deve essere oggettivo;
- le teorie dell'apprendimento devono nascere dall'evidenza sperimentale.

Dalle risposte degli individui agli stimoli si possono però trarre informazioni sui processi intellettivi interni che generano le risposte osservate

 π

Teorie Cognitiviste

Per le Teorie cognitiviste l'apprendimento è un processo conoscitivo che trae origine dal bisogno di costruzione e di strutturazione del reale, implicito nell'interazione io/ambiente, e viene studiato analizzando i cambiamenti che avvengono nelle strutture cognitive del soggetto e nella sua personalità.

π Teorie Cognitiviste

- attenzione sul soggetto attivo nell'elaborazione della realtà circostante
- maggior rilievo ai processi interni di elaborazione e rappresentazione
- l'apprendimento viene ridefinito in relazione alle diverse componenti cognitive coinvolte
- associazione tra lo studio dell'apprendimento e quello della memoria

π Teorie Cognitiviste

Per una teoria dell'apprendimento matematico basata sugli studi cognitivi

- l'assunto di base è :
«L'allievo costruisce in modo attivo una sua propria conoscenza interagendo con l'ambiente ed organizzando le sue costruzioni mentali»
- L'istruzione influenza ciò che l'allievo apprende, ma non determina tale apprendimento
- L'allievo non si limita a recepire passivamente la conoscenza, ma la rielabora costantemente in modo autonomo

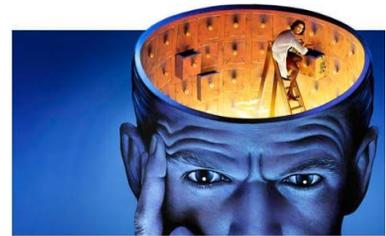
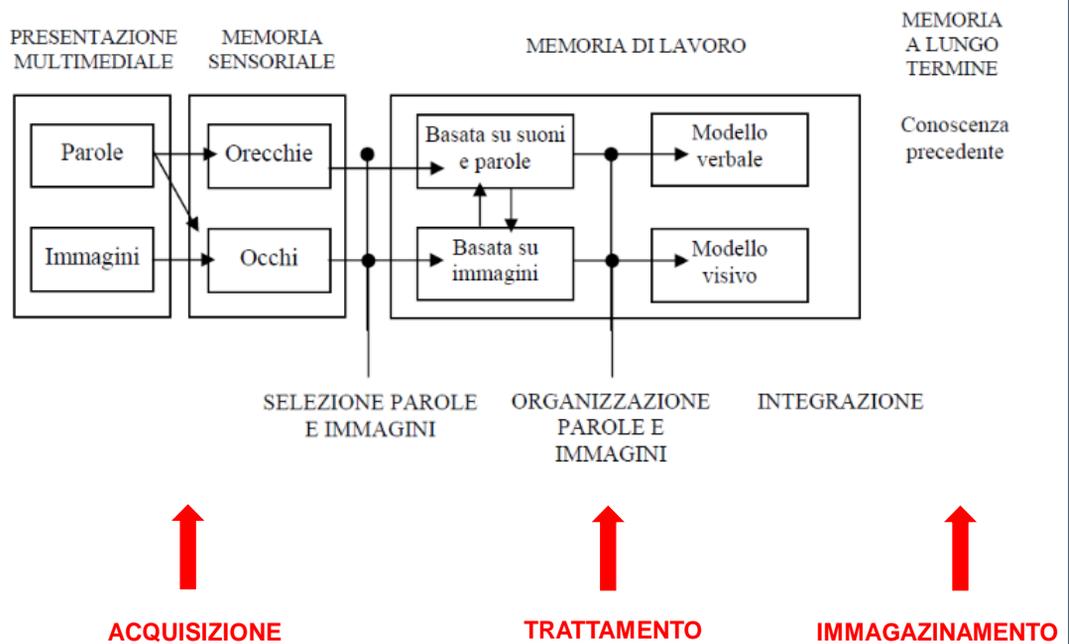
π

Teorie Cognitiviste

Le informazioni vengono processate dapprima dai sensi e successivamente dalla memoria

quindi

la progettazione dei contenuti formativi deve tener conto della necessità di assicurare tale trasferimento nel modo più efficace possibile.

 π 

π Teorie Cognitiviste

Il quantitativo d'informazione che può essere immagazzinata nella memoria è funzione di due fattori:

- l'attenzione dedicata alle informazioni dal discente;
- la presenza, nel discente, di strutture cognitive adeguate ad accoglierle.



Teorie Cognitiviste: autori di riferimento

π



E. Tolman 1886 - 1959



K.J.W. Craick 1914 - 1945



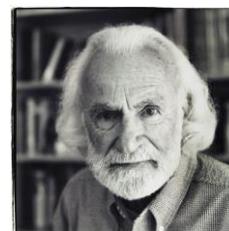
E. Galanter 1924 - 2016



W. Kohler 1887 - 1967



G.A. Miller 1920 - 2012



K. Pribram 1919 - 2015

π Teorie Cognitivo-Costruttiviste

Il comportamentismo è stato del tutto superato con l'avvento di ciò che viene chiamato *Costruttivismo radicale* che si fonda su due principi:

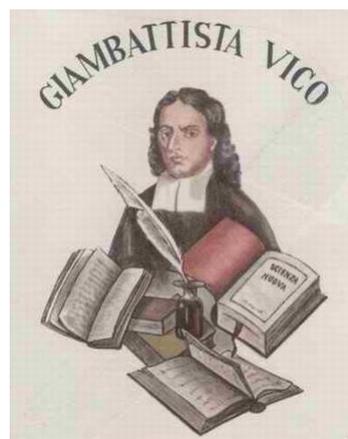
1. La conoscenza è costruita attivamente dal soggetto cognitivo, non passivamente ricevuta dall'ambiente;
2. Arrivare a conoscere è un processo adattivo che organizza il nostro mondo di esperienza, non scopre un mondo indipendente, preesistente, fuori dalla mente di chi conosce.

Ernst von Glasersfeld (1917-2010)

«*VERUM IPSUM FACTUM*»

Il vero è identico al fatto

CONOSCERE = FARE



L'uomo può conoscere solo ciò che fa, poiché solo il costruttore può sapere, delle cose che egli mette assieme, quali sono gli elementi che le compongono e in che modo sono stati collegati

Conoscenza



Più alta forma di adattamento di un organismo complesso

Adattamento all'ambiente



Assimilazione

Incorporazione di un oggetto o di un evento in uno schema comportamentale o cognitivo già acquisito

Accomodamento

Modifica della struttura cognitiva o dello schema comportamentale per accogliere nuovi oggetti o eventi prima ignoti

π

Stadi dello sviluppo cognitivo

Stadio senso-motorio

- ✓ Dura dalla nascita ai due anni
- ✓ Il neonato distingue se stesso dagli oggetti circostanti, cercando stimoli e osservando il mondo esterno
- ✓ I significati vengono definiti attraverso la manipolazione
- ✓ L'oggetto rimane «lo stesso oggetto» anche se cambia la sua collocazione o se il bambino cambia punto di osservazione



π

Stadi dello sviluppo cognitivo

Stadio del pensiero pre-operatorio

- ✓ Dura dai 2 ai 7 anni
- ✓ Il bambino è egocentrico, incapace di assumere il punto di vista degli altri
- ✓ Se A è come B in un aspetto fondamentale deve esserlo anche in tutti gli altri aspetti
- ✓ Sviluppa gradualmente il concetto di conservazione (6-7 anni)

 π

Stadi dello sviluppo cognitivo

Stadio delle operazioni concrete

- ✓ Dura dai 7 agli 11 anni
- ✓ Acquisisce una più autonoma organizzazione mentale
- ✓ Acquisisce una visione meno egocentrica della realtà
- ✓ E' in grado di usare operazioni logiche



π

E' in grado di usare *operazioni logiche*:

- ❖ la reversibilità (aritmetica)
- ❖ La classificazione (organizzare gli oggetti in gerarchie di classi)
- ❖ La seriazione (organizzare gli oggetti in serie ordinate)

 π

Stadi dello sviluppo cognitivo

Stadio delle operazioni formali

- ✓ Dura dagli 11 ai 15 anni
- ✓ Pensiero astratto e concettualizzazione
- ✓ E' in grado di formulare un ragionamento ipotetico deduttivo



π Teorie Costruttiviste



π Teorie Costruttiviste

Nel 1973 S. Erlwanger «Benny's Conceptions of Rules and Answers in IPI Mathematics».

IPI sta per Individually Prescribed Instruction

Approccio individuale, realizzato attraverso materiale molto strutturato, organizzato in sequenze in modo tale che il passaggio da una sequenza alla successiva è vincolato al fatto che l'allievo dimostri di possedere i prerequisiti necessari



π Teorie Costruttiviste

- Benny somma e moltiplica frazioni correttamente nella maggior parte dei casi
- in alcuni casi invece commette degli errori vistosi: ad esempio dice che $2/1 + 1/2$ è uguale a 1, e che la rappresentazione decimale di $2/10$ è 1,2

B.: Nelle frazioni abbiamo 100 tipi diversi di regole...

E.: Sei capace di dirmi queste regole?

B.: Sì...forse, ma non tutte.

La successiva spiegazione di Benny suggerisce che le regole usate dal ragazzo dipendono dal denominatore delle frazioni da sommare, in questo modo

π Teorie Costruttiviste

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}; \text{ ad esempio } \frac{3}{10} + \frac{4}{10} = \frac{7}{10}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}; \text{ ad esempio } \frac{4}{3} + \frac{3}{4} = 1$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{c} = 1 + \frac{a}{b}; \text{ ad esempio } \frac{2}{3} + \frac{4}{4} = 1 + \frac{2}{3}$$

Il programma è organizzato in domande, e ogni volta, prima di passare alla domanda successiva, viene valutata la correttezza della risposta data: da questa correzione Benny tenta di ricostruire la procedura corretta, e in base a questa, modifica quella che ha utilizzato

π Teorie Costruttiviste

Erlwanger conclude sottolineando il fallimento del programma IPI nel caso di Benny, dato che nonostante la mancata comprensione di concetti fondamentali, ma addirittura nonostante la mancata conoscenza degli algoritmi, il ragazzo ha ottenuto invece un successo nella prestazione.

Lo studioso individua fra le responsabilità di questo fallimento la struttura del programma, centrata sui prodotti piuttosto che sui processi, ed il fatto che la rigidità del programma forza Benny nel ruolo passivo di chi produce risposte con l'obiettivo che siano riconosciute come corrette

π Teorie Costruttiviste

Osservazione.

Lo studio mostra un nuovo modo di fare ricerca in didattica della matematica basato su:

- Analisi di un caso (case study)
- Metodologia prevalente: intervista

e porta alla luce il ruolo delle convinzioni degli allievi nel fare matematica

π

Costruttivismo radicale

INSEGNAMENTO

Procedure che hanno il fine di generare conoscenza;

organizzazione dell'ambiente per favorire la costruzione di conoscenze.

TRAINING

Procedure che hanno il fine di ottenere un dato comportamento;

organizzazione dell'ambiente per favorire la messa in atto di un determinato comportamento.

I processi degli allievi diventano più importanti dei prodotti. I processi degli allievi che deviano dalle aspettative degli insegnanti sono segnali per interpretare il loro processo di adattamento.

 π

Teorie Costruttiviste

Il costruttivismo è un nuovo quadro teorico di riferimento che pone il soggetto che apprende al centro del processo formativo (learning centered).



In alternativa a un approccio formativo basato sulla centralità dell'insegnante (teaching centered) quale depositario indiscusso di un sapere universale, astratto e indipendente da un contesto di riferimento

π Teorie Costruttiviste

Questa corrente di pensiero assume che la conoscenza:

- è il prodotto di una costruzione attiva da parte del soggetto;
- è strettamente collegata alla situazione concreta in cui avviene l'apprendimento;
- nasce dalla collaborazione sociale e dalla comunicazione interpersonale.



π Teorie Costruttiviste

Accettare e promuovere l'inevitabile confronto derivante da più prospettive individuali è uno degli scopi fondamentali del costruttivismo.

L'apprendimento non è solo visto come un'attività personale, ma come il risultato di una dimensione collettiva di interpretazione della realtà.



π Teorie Costruttiviste

La formazione è un'esperienza situata in uno specifico contesto.

Il soggetto, spinto dai propri interessi e dal proprio background culturale, costruisce attivamente una propria integrazione della realtà attraverso un processo di integrazione di molteplici prospettive offerte.

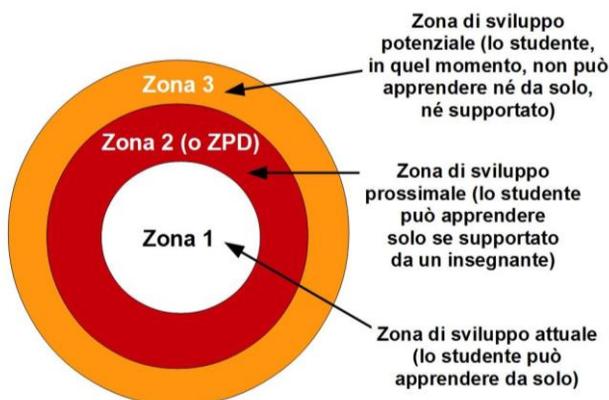


π Teorie Costruttiviste

Il progettista didattico dovrà

- elaborare e pensare un percorso didattico improntato sul discente che diventa parte attiva del processo di conoscenza
- Inserire notevoli attività pratiche, simulazioni strutturate e destrutturate che stimolino la creatività e il formarsi di un proprio sapere sull'argomento oggetto del corso.

Zona di sviluppo prossimale



Avviene in tre fasi:

1. La prestazione è controllata dall'adulto/esperto
2. La prestazione è controllata dal bambino
3. La prestazione è automatizzata



Il contatto con il liquido provoca nel bambino riflessi incondizionati

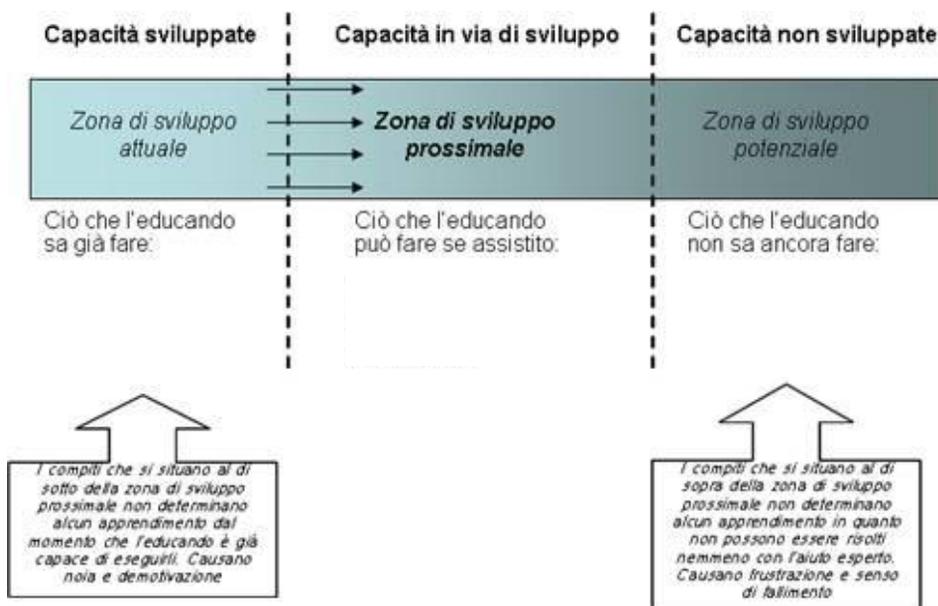
Molto presto i movimenti si riorganizzano:

- Il suo bordo viene stretto dall'alto al labbro inferiore
- La bocca si distende
- La punta della lingua tocca la superficie interna della mascella inferiore
- Le narici si allargano
- Il liquido scorre dalla tazza inclinata nella bocca

Nasce un sistema motorio funzionale nuovo che realizza l'atto del bere includendo in sé nuovi elementi

Lo sviluppo è garantito dalla guida di un adulto che assolve alla funzione di supporto alla soluzione del compito da seguire (scaffolding)

Zona di sviluppo prossimale



L'apprendimento non si riduce a una mera acquisizione di informazioni, bensì va a costruire la fonte e il motore trainante dello sviluppo e della crescita

L'essenza dell'insegnamento dovrebbe consistere, di conseguenza, nel garantire lo *sviluppo* fornendo al discente *strumenti, tecniche interiori di pensiero e operazioni di ragionamento*

π

Teorie Costruttiviste: autori di riferimento



L. Vygotskij 1896 - 1934



J. Bruner 1915 - 2015



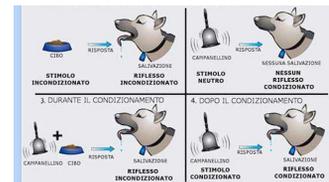
J. Piaget 1896 - 1980



D. Merrill 1937

Inizio XX secolo

Teorie Comportamentiste



1950 - 1960

Teorie Cognitiviste



1970 - 1990

Teorie Costruttiviste



Teoria della mediazione semiotica

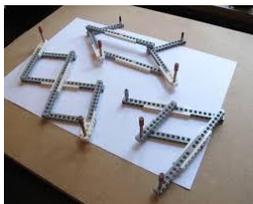
M.G Bartolini Bussi – M.A. Mariotti *Mediazione semiotica nella didattica della matematica: artefatti e segni nella tradizione di Vygotskij*, L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate, 32 (A+B) pp. 269-294

π

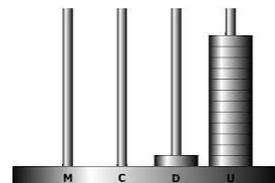
π La mediazione semiotica

Il ruolo principale di un insegnante di matematica è rendere il sapere matematico accessibile ai suoi studenti.

Questa missione educativa può essere raggiunta utilizzando vari mezzi e strumenti (anche le tecnologie ICT Tecnologie dell'Informazione e della Comunicazione)



Artefatti



π

La mediazione semiotica

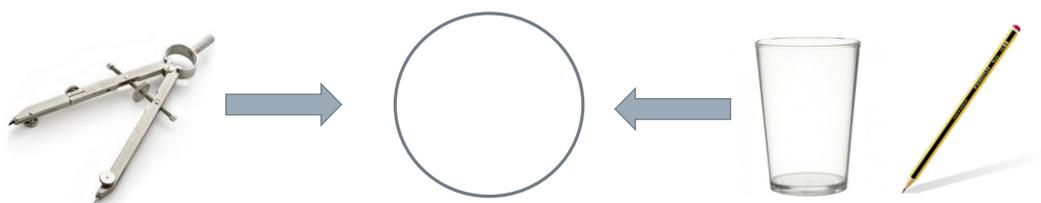
La TMS (Teoria della Mediazione Semiotica) fornisce un modello del processo d'insegnamento e di apprendimento sviluppandosi attorno a due elementi chiave:

Potenziale semiotico
di un artefatto

Ciclo didattico

 π

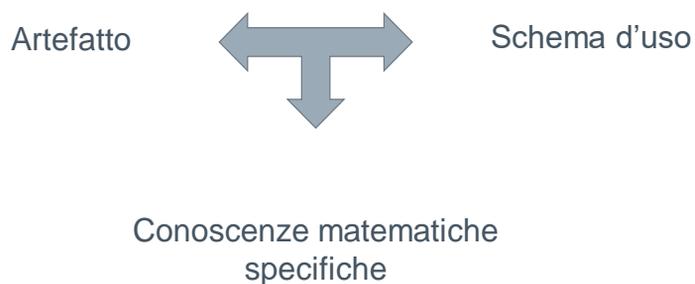
Il potenziale semiotico



- il prodotto finale è lo stesso,
- la procedura seguita è completamente differente,
- sono evocate proprietà geometriche piuttosto diverse.

π

Il potenziale semiotico



Rabardel (1995)

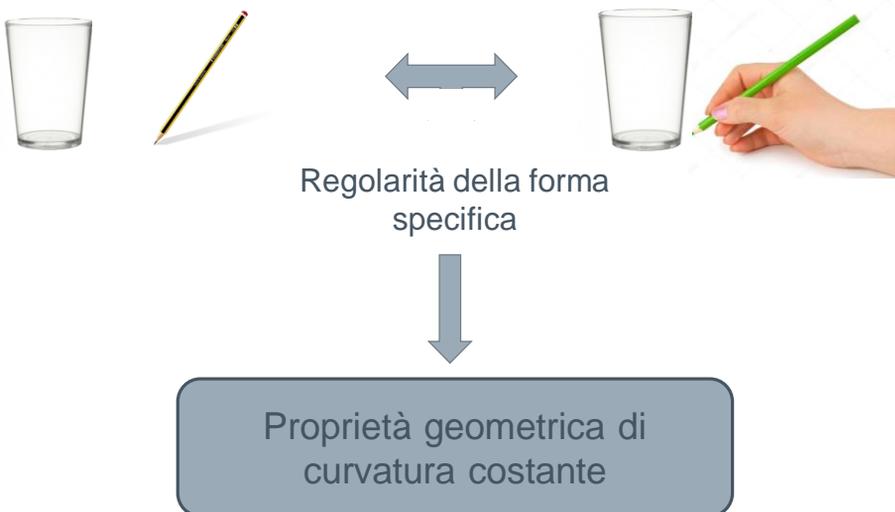
Significati
personali*ARTEFATTO*Significati
matematici

Il potenziale semiotico

(Bartolini Bussi & Mariotti, 2008)

π

Il potenziale semiotico

 π

Il potenziale semiotico



π

Il potenziale semiotico

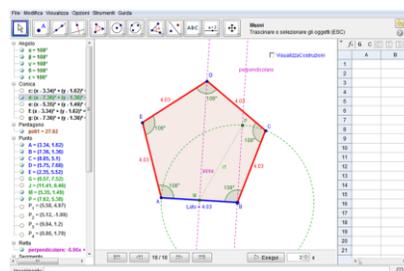
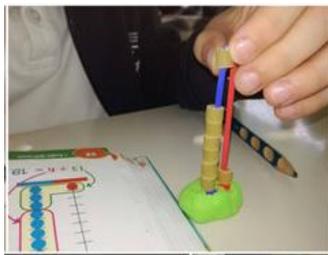
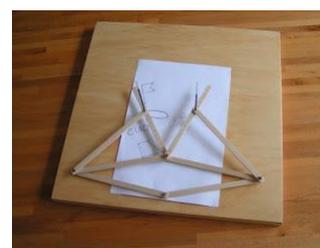


Hanno potenziali semiotici differenti

La progettazione di qualsiasi progetto pedagogico (sequenza d'insegnamento-apprendimento) centrato sull'utilizzo di un dato artefatto deve basarsi su una descrizione a priori del potenziale semiotico dell'artefatto

 π

Artefatti: esempi

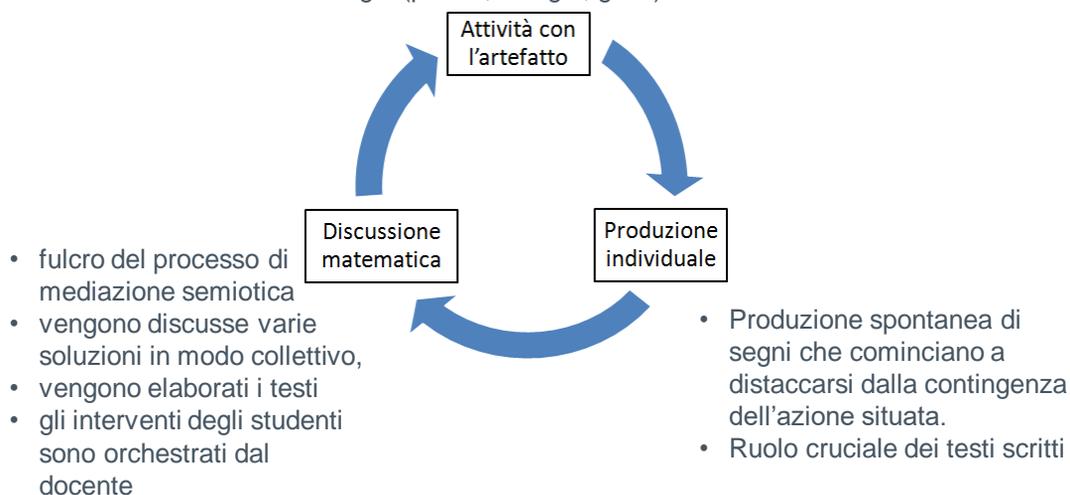


π Ciclo didattico

- analisi cognitiva ed epistemologica,
- sequenza di possibili compiti,
- organizzazione didattica di questi compiti,
- gestione delle attività in classe da parte del docente.

π Ciclo didattico

Richiesta agli studenti di portare a termine un compito che implichi l'utilizzo dell'artefatto, con l'obiettivo di promuovere la produzione di segni (parole, disegni, gesti)

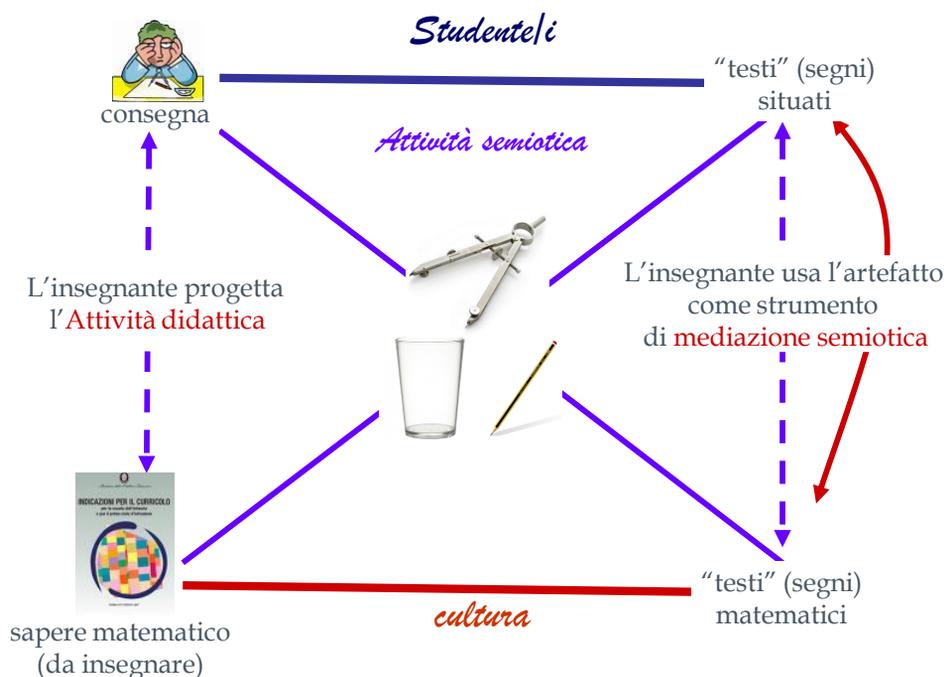


π Ruolo del docente

In ogni fase del ciclo didattico il docente ricopre un ruolo cruciale.

Il suo intervento comprende:

- l'ideazione di compiti atti a favorire l'emergere del potenziale semiotico dell'artefatto scelto;
- l'analisi delle soluzioni e delle sintesi scritte dagli studenti;
- la progettazione di discussioni collettive sulla base dei risultati delle precedenti analisi;
- la gestione della discussione collettiva favorendo l'evoluzione dei significati personali degli studenti verso i segni matematici desiderati.



π

Mediazione semiotica

Processo di insegnamento e apprendimento matematico

- qualcuno che media (l'insegnante)
- qualcosa che viene mediato (il sapere matematico)
- qualcuno soggetto alla mediazione (lo studente)

- circostanza della mediazione:
- I mezzi della mediazione (ciclo didattico)
- Il luogo (il laboratorio di matematica)

(Modello introdotto da R. Hasan 2002)

 π

Il Laboratorio di Matematica

- Idea proposta nel 1908 dall'International Commission on Mathematical Instruction (ICMI)
- Visto come:
 - ✓ *Avventura culturale* (UMI-CIIM Matematica 2003) in cui la matematica è proposta come sfida storico-culturale.
 - ✓ *Ambiente di modellizzazione* (OCSE-PISA) in cui la matematica è vista come utile per le applicazioni.
- Luogo in cui:
 - si lavora con fenomeni o artefatti, attraverso la loro manipolazione diretta;
 - si svolge lavoro individuale, a piccoli gruppi e a grande gruppo;
 - avvengono le discussioni.

*Che cos'è così caratteristico dell'attività
matematica, in confronto alle altre
attività cognitive, da suscitare difficoltà
di apprendimento più complesse che in
altri campi?*

