

# Didattica della Matematica

27 marzo 2020  
Prof.ssa Eliana Francot

$\pi$

## Esempio di situazione a-didattica

### **Situazione di azione**

L'insegnante propone il problema alla classe

### **Situazione di formulazione**

- Gli studenti si confrontano sulle possibili strategie di risoluzione del problema e fanno delle proposte.
- L'insegnante dirige la discussione e accoglie la proposta di utilizzare Geogebra
- Gli studenti utilizzano Geogebra per studiare il problema e riformulano ulteriori congetture sulla possibile soluzione

### **Situazione di validazione**

- Gli studenti cercano di verificare la congettura più accreditata attraverso la funzione di trascinamento di Geogebra
- L'insegnante interviene solo per mettere ordine nel dibattito tra gli studenti

### **Situazione di istituzionalizzazione**

- L'insegnante comunica agli studenti che la loro congettura è vera perché conseguenza del teorema dei punti medi che afferma che...

# Componenti dell'apprendimento della matematica

Bolondi G., Fandiño Pinilla M. I. (2008). Molteplici aspetti dell'apprendimento della matematica. In. Atti del XXII Convegno Nazionale: Incontri con la Matematica. Castel San Pietro Terme, 7-8-9 novembre 2008.

 $\pi$ 

## Apprendere la matematica è...

Saper risolvere problemi?

Comprendere i concetti?

Conoscere i procedimenti?

Saper dare definizioni?

Utilizzare il linguaggio corretto?

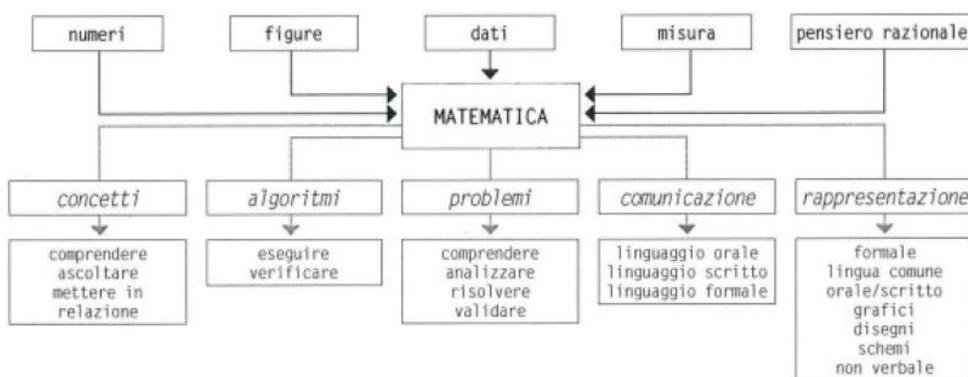
Risolvere problemi?

## Una combinazione di molteplici fattori

«In matematica, infatti, non basta aver **costruito un concetto**, ma occorre **saperlo usare** per **effettuare calcoli o dare risposta ad esercizi**, **combinarlo con altri e con strategie opportune per risolvere problemi**, occorre **saper spiegare a sé stessi ed agli altri** il concetto costruito e la strategia seguita, occorre **saper far uso sapiente delle trasformazioni semiotiche** che permettono di passare da una rappresentazione ad un'altra. »

(“Molteplici aspetti dell'apprendimento della matematica” Bolondi, Fandino-Pinilla (2008))

## Le “componenti” dell'apprendimento della matematica



Concettuale

Algoritmico

Strategico

Comunicativo

Semiotico

## Istruzioni per l'uso

I “tipi di apprendimento” non sono né separabili, né indipendenti, né disgiunti, né esaustivi.

Lente utile per “scomporre” il problema dell'apprendimento e, contemporaneamente, dargli “spessore”: apprendimento come processo multidimensionale.

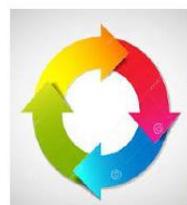
Possono dare una chiave di lettura per analizzare le cause degli errori degli studenti.

Può permettere di fare una **valutazione più specifica** dell'apprendimento degli studenti e dell'azione didattica.



## Perché si valuta?

Per prendere decisioni circa il contenuto (trasposizione didattica) e la metodologia (ingegneria didattica).



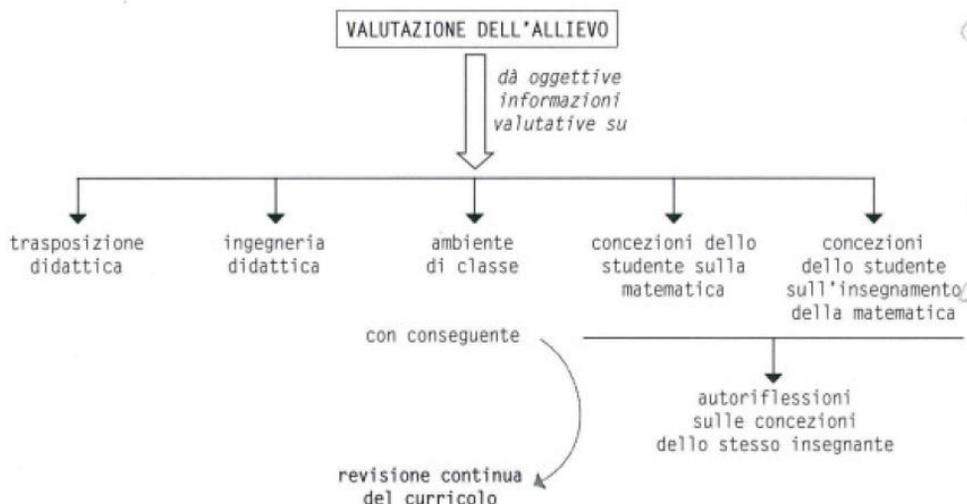
Per comunicare agli allievi quello che è importante.

Per dare un voto.



## La valutazione

Immagine tratta da: "Molteplici aspetti dell'apprendimento della matematica" Fandino-Pinilla, Erickson, Trento 2010



## Apprendimento concettuale (noetico)...

Un concetto (od oggetto matematico) si può dire cognitivamente costruito quando l'allievo è in grado di:

- identificare proprietà del concetto utilizzabili in diversi contesti e dunque di rappresentarlo in maniera adeguata a seconda delle situazioni
- di trasformare tale rappresentazione in caso di necessità
- di usarlo in modo opportuno in una pluralità di situazioni, anche dopo trasformazioni di conversione.

## ...e apprendimento semiotico

Capacità dell'allievo di gestire le rappresentazioni di un concetto e in particolare di: rappresentare, trattare, convertire.

## $\pi$ Apprendimento concettuale

### CARATTERISTICHE GENERALI

- richiesta di spiegazioni, argomentazione
- cooperative learning, apprendimento per scoperta, didattica laboratoriale
- discussioni in aula
- costruzione di schemi e mappe concettuali

### ATTIVITÀ' SPECIFICHE

- resoconti verbali
- schede MERLO: Meaning Equivalence Reusable Learning Objects
- TEP: Textual EigenProduktionen

#### ▼ Instructions

At least two of these five statements mean the same thing. However, it is possible that more than two statements have equivalent meaning. Select all - **but only** - those statements that have equivalent meaning.

Please enter the concept you had in mind when selecting the statements with equivalent meaning in the space provided below.

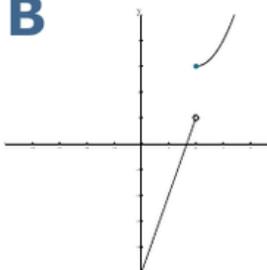
Student input:

Submit

### A

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$$

### B



### C

The limit of the function  $f(x)$  as  $x$  approaches 2

If (i)  $f(x) = x^2 - 4x + 7$  when  $x \leq 2$

(ii)  $f(x) = 3x - 5$  when  $x > 2$

### D

The limit of the function  $f(x)$  as  $x$  approaches 2

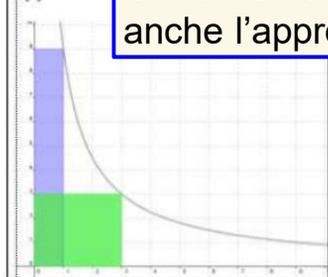
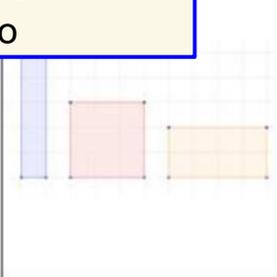
if (i)  $f(x) = x^2 - 4x + 7$  when  $x \geq 2$

(ii)  $f(x) = 3x - 5$  when  $x < 2$

### E

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 3$$

## MERLO: Meaning Equivalence Reusable Learning Objects

<p>Rettangoli equivalenti SA</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Segnare le rappresentazioni che condividono lo stesso significato (due o più);</li> <li>2. Indicare le ragioni che guidano nella scelta.</li> </ol>	<p>TS</p> <p>A[ ]</p> $y = \frac{k}{x}$	<p>Q2</p> <p>B[ ]</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>y</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>9</td></tr> <tr><td>2</td><td>4.5</td></tr> <tr><td>3</td><td>3</td></tr> <tr><td>4</td><td>2.25</td></tr> <tr><td>5</td><td>1.8</td></tr> <tr><td>6</td><td>1.5</td></tr> <tr><td>7</td><td>1.28</td></tr> <tr><td>8</td><td>1.125</td></tr> <tr><td>9</td><td>1</td></tr> </tbody> </table>	x	y	1	9	2	4.5	3	3	4	2.25	5	1.8	6	1.5	7	1.28	8	1.125	9	1
x	y																					
1	9																					
2	4.5																					
3	3																					
4	2.25																					
5	1.8																					
6	1.5																					
7	1.28																					
8	1.125																					
9	1																					
<p>Q2</p> <p>C[ ]</p> 																						

Ovviamente queste schede valutano anche l'apprendimento semiotico

Scheda tratta da "Meaning Equivalence Learning Reusable Objects. An unexpected mathematical problem: the Dido's myth" Abbati et al.

$\pi$

## Apprendimento semiotico

E' sempre coinvolto nelle altre componenti, e quindi valutabile essenzialmente in ogni esercizio/attività, ma si possono pensare attività più specifiche.

Data l'equazione della retta  $3x-2y-1=0$ , trattare questa rappresentazione algebrica mettendola in forma esplicita, convertirla mettendola in forma di tabella numerica, convertirla mettendola in grafico cartesiano.

Disegna una retta nel piano: converti la rappresentazione geometrica in due diverse rappresentazioni algebriche scegliendo due diversi sistemi di riferimento cartesiano e trovando l'equazione della retta nei due sistemi di riferimento.  
Esiste "un'operazione" che ti permette di passare da un'equazione all'altra rimanendo nel registro algebrico?

## TEP: Textual EigenProduktionen

Produzioni testuali autonome nelle quali lo studente, messo in condizioni di volersi esprimere in modo comprensibile e con linguaggio personale, accetta di liberarsi da condizionamenti linguistici e fa uso di espressioni spontanee.



D'Amore B., Maier H. (2002). Produzioni scritte degli studenti su argomenti di matematica (TEPs) e loro utilizzazione didattica. *La matematica e la sua didattica*, 2, 144-189.

Esempi di TEPs sono dunque:

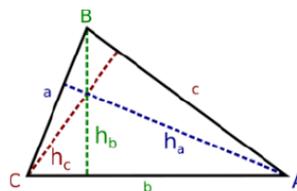
- protocolli commentati di problem solving ( da cui hanno avuto origine)
- resoconto il più possibile spontaneo di ricerche di tipo matematico (tentativi, passaggi, misurazioni, risultati,...)
- descrizioni dettagliate e spiegazioni di concetti o di algoritmi matematici
- testi introdotti da una specifica situazione che richiede di comunicare fatti e relazioni matematiche in forma scritta
- testi che definiscono concetti matematici, che formulano ipotesi, argomentazioni o prove in relazione ad un teorema matematico o comunque ad una situazione matematica
- ...

Nella forma di: testi liberi, racconti, articoli di giornale, pagine web, mostre matematiche, diari di viaggio...

*Immagina di essere un papà (una mamma)... Il tuo figliolo di 7 anni ha sentito dire da qualcuno che ogni triangolo ha tre altezze e ti chiede "Papà (mamma) cosa vuol dire?" Non c'è niente di peggio di eludere la domanda di un bambino; perciò decidi di rispondergli.*

"Figlio mio, tu ancora non conosci la geometria, ma ti spiegherò cosa vuol dire la parola altezza. Come te io e papà abbiamo un'altezza che è misurata dalla testa ai piedi; così anche i triangoli hanno un'altezza, ma la loro altezza si misura dal vertice, che è un piccolo punto, giù fino alla base, che è come i nostri piedi. Poiché i triangoli hanno tre piccoli punti (vertici), hanno tre altezze perché hanno tre paia dei nostri piedi. E poiché noi abbiamo solo una testa e un paio di piedi, abbiamo una sola altezza."

(Simona secondaria di I grado classe II)



B. D'Amore, H. Maier "Produzioni scritte degli studenti su argomenti di matematica (TEPs) e loro utilizzazione didattica" proposto ad allievi 12-15 anni

Spiega  
ad un compagno  
che era assente ieri  
cos'è una frazione.

Spiega ai ragazzi  
che l'anno prossimo inizieranno  
la scuola superiore l'argomento  
di matematica che più ti ha  
colpito quest'anno

Data la funzione  $f(x)=3x+5$   
discuti con i tuoi colleghi di gruppo  
ciascuna delle seguenti frasi

- il suo grafico è una retta
- il suo grafico dipende dal campo numerico in cui si prende x
- il suo grafico è una retta parallela all'asse x
- è possibile sapere il suo grafico solo se se ne conosce il dominio

Inventa situazioni e domande analoghe

Le "spiegazioni" devono essere indirizzate a qualcuno che abbia  
bisogno di aiuto.

Il destinatario, per quanto fittizio, non deve essere l'insegnante che già sa  
(e quindi legge/ascolta solo per giudicare).

**Franco:** Parlando di angoli hai subito fatto riferimento a come usiamo la parola angolo nel linguaggio quotidiano. Questo mi fa ricordare quanto è stato sempre

<http://www.educareallaliberta.org/emma-castelnuovo-radici-e-ragioni-di-un-metodo-una-conversazione-a-cura-di-franco-lorenzoni/>

in italiano. Mi ricordo la soddisfazione con cui la parasta di questo suo ottimo risultato con l'insegnante di lettere.



Emma Castelnuovo  
1913-2014

**Emma:** Scrivere è molto importante e io credo che il linguaggio possa essere facilitato dalla matematica. Se devi spiegare come si costruisce un rettangolo che ha la base tripla dell'altezza, questo è più facile che raccontare un'esperienza che hai vissuto. Così la matematica può facilitare un uso corretto del linguaggio, perché ci sono da adoperare poche parole, ma in modo chiaro e sintetico. In questo modo, tra l'altro, si possono aiutare oggi anche i compagni non italiani che ci sono in numero sempre maggiore nelle nostre scuole. E vengono facilitati anche i compagni italiani, perché si abitua a parlare bene l'italiano, con poche parole. Oggi, che sono sempre meno coloro che sanno dire correttamente due parole di seguito, questa è una cosa importantissima. La matematica può aiutare a parlare bene l'italiano. Non una matematica fredda, naturalmente, ma una matematica appresa con i materiali, di cui poi si possano verbalizzare i passaggi e le scoperte fatte con poche parole semplici, chiare, legate all'esperienza.

$\pi$

## Apprendimento comunicativo

E' legato all'abilità dell'allievo di esprimere idee matematiche, giustificando, argomentando, dimostrando (in forma sia orale che scritta) e rappresentando in modo visivo, in modo efficace.

### PARADOSSO DEL LINGUAGGIO SPECIFICO (D'Amore)

L'insegnante deve far sì che il linguaggio utilizzato non sia esso stesso fonte di ostacoli alla comprensione dell'allievo



tutta la comunicazione deve avvenire nella lingua comune.

La matematica ha elaborato nei millenni un suo linguaggio specifico (o addirittura secondo alcuni è un linguaggio specifico); uno dei principali obiettivi di chi la insegna è quella di far apprendere agli allievi non solo a capire, ma anche a far proprio quel linguaggio specialistico



non si può evitare di far entrare in contatto gli allievi con quel linguaggio specifico, anzi, occorre presentarlo (**imporlo**) perché lo facciano proprio.

## EFFETTI DEL PARADOSSO DEL LINGUAGGIO SPECIFICO: *IL MATEMATICHESE*

L'abbinamento tra una “pseudo-lingua” che viene utilizzata dall'insegnante nel tentativo di “semplificare” il linguaggio per superare il paradosso e il tentativo dell'allievo di imitare l'insegnante rinunciando al senso e prestando attenzione alla forma.



## INOLTRE

Caratteristiche linguistiche e conseguenti richieste fatte agli studenti



### Ambito matematico (scientifico)

- precisione/concisione
- atemporalità

### Ambito non-scientifico

- ricchezza lessicale/descrittiva
- stile narrativo

**SONO DIVERGENTI!**

## COME SUPERARE IL PARADOSSO DEL LINGUAGGIO SPECIFICO?

Qualsiasi comunicazione è efficace se raggiunge il suo scopo: **la comprensione del messaggio**. Dunque bisogna mediare tra le attese dell'insegnante sulla correttezza della comunicazione e le verifiche sull'efficacia di questa (ES. studenti che si esprimono tra loro in modo "inaccettabile" ma si comprendono).



Il "rigore" matematico ha lo scopo di semplificare la comprensione e quindi migliorare l'efficacia della comunicazione e come tale deve essere proposto/imposto: quindi è di fondamentale importanza la **scelta degli esempi escogitati per far capire l'importanza di un linguaggio rigoroso**.



**Mettere in relazione tra loro i vari tipi di linguaggi** ("matematico", naturale, "degli studenti") facendo confronti, mettendo in luce le differenze e le analogie.

$\pi$

Attività per sollecitare/valutare la componente comunicativa

### CARATTERISTICHE GENERALI

- richiesta di spiegazioni, argomentazione
- cooperative learning
- discussioni in aula
- esposizione di progetti



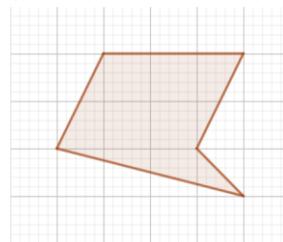
$\pi$ 

## Attività per sollecitare/valutare la componente comunicativa

### ESEMPIO DI ATTIVITÀ SPECIFICA

“Comunica al telefono ad un tuo compagno le indicazioni per disegnare la figura a fianco (che tu vedi e lui no); il tuo messaggio sarà considerato efficace, se il tuo compagno disegnerà bene le figure. Solo in tal caso la valutazione sarà positiva per entrambi.

Che indicazioni daresti? Verifica la loro efficacia su un compagno reale. Se non funziona, correggi le tue indicazioni, cercando una comunicazione più efficace. Decidi dei criteri per stabilire il perché delle eventuali risposte erranee dei tuoi compagni.”

 $\pi$ 

## Apprendimento algoritmico

E' legato all'abilità dell'allievo di dare risposte alle operazioni, al calcolo, all'applicazione di formule o al disegno di figure.

**Quali algoritmi affrontare e perché? Con quali cautele?**



per un motivo didattico: i passi da effettuare sono meccanici, ma ogni passo ha una sua funzione ed una giustificazione logica e concettuale  
Euclid the game  
<https://kasperpeulen.git hub.io/>

per un motivo culturale: la storia della matematica mostra che lo studio e la creazione di algoritmi sono stati parte integrante e creativa dello sviluppo della matematica



è necessario tenere conto della tecnologia (scuola secondaria I grado algoritmo di estrazione della radice *non si studia più*)

## $\pi$ Attività per sollecitare/valutare la componente algoritmica

Va valutata non solo la capacità di eseguire correttamente algoritmi, ma anche la capacità di costruire o **scegliere l'algoritmo più opportuno a seconda della situazione.**

Trova il procedimento più efficace per risolvere ciascuna delle seguenti situazioni e giustifica la tua risposta: puoi scegliere tra calcolatrice, calcolo mentale, calcolo a mano, altra tecnica (in tal caso descrivila).

In ogni caso dichiara che strumenti hai scelto e perché hai escluso ciascuno degli altri.

- qual è il resto della divisione 4567: 230?
- se una matita costa 0,75 euro, quanto costano 10 matite?
- qual è la radice quadrata di 576?
- trova la somma dei primi cento numeri naturali a partire da 1
- esegui  $2356-1356$
- se  $x+y=100$  quanto sarà  $(x-1)+(y+2)$ ?
- trova le radici dell'equazione  $(x-1)(x+2)=0$
- esegui  $300+450+200$

Spiega la seguente situazione e

generalizzala

$$321-123=198$$

$$432-234=198$$

$$543-345=198$$

Trova, se esistono, due numeri naturali il cui prodotto sia 1000000 però tali che nessuno dei due contenga lo 0 nella sua scrittura

Un tale afferma che se  $n$  è un naturale anche  $n(n^4-1)/5$  lo è. Tu cosa ne pensi?

Supponendo di avere a che fare con un sistema quadrato e determinato, spiega in quali condizioni (anche facendo degli esempi) sia più conveniente usare l'algoritmo di Gauss, la regola di Cramer, il calcolo dell'inversa.

## $\pi$ Apprendimento strategico

E' legato all'abilità dell'allievo di risolvere problemi (*nuovi*), situazioni problematiche e quindi alla capacità di trovare strategie di risoluzione.

- Il problem solving è collegato ed integrato dal problem posing
- è un processo prevalentemente interno all'allievo, che generalmente prevede un atto creativo e quindi impossibile da codificare
- il processo risolutivo genera un nuovo apprendimento: la risoluzione di problemi si svolge nella zona prossimale di Vygotskij

«Ciò che i bambini possono fare con l'assistenza di altri potrebbe essere in un certo senso più indicativo del loro sviluppo mentale di quello che sanno fare da soli.»  
Vygotskij

## $\pi$ Attività per sollecitare/valutare la componente strategica

### PROBLEMI "STORICI"

“Un contadino deve attraversare un fiume con una piccola barca, portando con sé una pecora, un lupo ed un cavolo, ma la barca può trasportare, oltre all'uomo, uno solo di questi. Come farà l'uomo a compiere il passaggio? Il fatto è che se abbandona da soli capra e cavolo, la capra mangerà il cavolo; se abbandona da soli lupo e pecora, il lupo mangerà la pecora.“  
(dal libro di Indovinelli matematici di Beda di York (672-735))

“Un Arabo morendo lasciò ai suoi 3 figli 17 cammelli in eredità ed ordinò che la metà di essi fosse data al primo figlio, la terza parte al secondo, e la nona al terzo figlio. I tre figli si rivolsero per la divisione al cadi, il quale venne con il proprio cammello che unì agli altri. Diede la metà dei 18 cammelli, cioè 9, al primo figlio, la terza parte, cioè 6, al secondo, e la nona parte, cioè 2, al terzo figlio, e poi ripreso il suo cammello, se ne andò ringraziato dai tre figli, ognuno dei quali aveva ricevuto più di quello che gli spettava.” (Indovinello attribuito al mondo arabo da G. Peano “Giochi di aritmetica e problemi interessanti”)



“Computo delle coppie di conigli” da Liber Abaci di Fibonacci  
<http://utenti.quipo.it/base5/fibonacci/fibonacci.htm>

## PROBLEMI “IRRISOLUBILI”

Il problema dei ponti di Könisberg

[https://it.wikipedia.org/wiki/Problema\\_dei\\_ponti\\_di\\_K%C3%B6nigsberg](https://it.wikipedia.org/wiki/Problema_dei_ponti_di_K%C3%B6nigsberg)

IRRISOLUBILE

Paperino e i ponti di Quackenberg”  
(sceneggiata da Alberto Saracco e  
Francesco Artibani)  
Topolino 3232 (novembre 2017)



L'ultimo teorema di Fermat

[https://it.wikipedia.org/wiki/Ultimo\\_teorema\\_di\\_Fermat](https://it.wikipedia.org/wiki/Ultimo_teorema_di_Fermat)

RISOLUBILE MA FERMAT NON PUO' AVERLO FATTO COSÌ



Il problema della colorazione delle carte geografiche

[https://it.wikipedia.org/wiki/Teorema\\_dei\\_quattro\\_colori](https://it.wikipedia.org/wiki/Teorema_dei_quattro_colori)

RISOLUBILE MA DIMOSTRATO CON L'AIUTO DEL CALCOLATORE

## PROBLEMI RISOLUBILI IN MANIERA *INUSUALE*

“Data l’altezza dell’albero maestro di una nave appena entrata nel porto di Genova, trovare l’età del capitano”

“Il problema si risolve sapendo che quella nave si trovava presso Genova; alla capitaneria del porto trovasi la descrizione delle navi che frequentano il porto. Da questo registro deduciamo il nome della nave; in altro registro leggiamo il nome del capitano e dall’ufficio di anagrafe ricaviamo la sua età. Quasi tutti i problemi che si presentano in pratica sono della natura di questo”. (Peano “Giochi di aritmetica e problemi interessanti”)

ROTTURA DEL CONTRATTO DIDATTICO

## Problemi che non hanno soluzioni univoche

Konrad Adenauer (1876-1967) è una delle più importanti figure della storia europea. E' stato il primo cancelliere tedesco della Repubblica Federale della Germania. Ha contribuito significativamente a cambiare la storia della Germania e dell'Europa dopo la Seconda Guerra Mondiale. Per Adenauer l'unità europea non era solo un modo per garantire la pace, ma anche un mezzo per reintegrare la Germania post-nazista nella vita internazionale



Il monumento Adenauer. Artista: Hubertus von Pilgrim

*Il monumento mostra la testa di Konrad Adenauer e si trova presso la corte federale di Bonn.*

*Quale sarebbe la dimensione della statua se mostrasse Adenauer dalla testa ai piedi?*

*Spiega dettagliatamente tutti i tuoi ragionamenti e calcoli fatti per arrivare alla risposta*

## GIOCO O PROBLEMA?

Da "Enigmi e giochi matematici" di M. Gardner

"Un esploratore giunge in una terra sconosciuta nella quale vivono due sole tribù. La prima tribù è costituita di indigeni che mentono sempre; la seconda di indigeni che dicono sempre la verità. L'esploratore incontra due indigeni vestiti e pitturati in modo molto diverso l'uno dall'altro. Chiede ad uno dei due:

"Sei uno di quelli che dicono solo la verità?"

L'indigeno risponde "Bali". Il secondo indigeno, che conosce l'italiano, interviene "Il mio amico vuole dire Sì ma lui è un gran bugiardo."

In base a tutto ciò, l'esploratore può decidere esattamente a quale tribù appartiene ciascuno dei due indigeni?"

Si trovano anche tante risorse on-line:

Giochi matematici del Mediterraneo <https://www.accademiamatematica.it/>

Olimpiadi della Matematica <http://olimpiadi.dm.unibo.it/>

Giochi Kangourou <http://www.kangourou.it/>

**Rally Matematico** <http://www.armtint.org/>

E' bene tenere conto più del processo che del prodotto ("risultato") e quindi dei diversi aspetti che intervengono nella risoluzione:

- comprensione del problema
- trasformazione o traduzione dell'enunciato in una forma "matematica" (aritmetica, algebrica, geometrica...)
- scelta delle strategie
- uso delle strategie
- validazione significativa della risposta da parte dell'allievo.

MODELLIZZAZIONE

Si può chiedere:

- che spieghino il loro ragionamento per iscritto o oralmente
- che si confrontino con un compagno
- che inventino una domanda (o un intero problema)
- che valutino la correttezza di una risoluzione
- **che debbano risolvere problemi che prevedano "verifiche pratiche"**

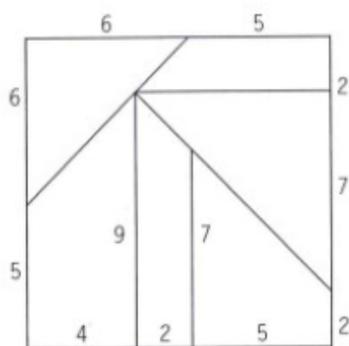


Figura A

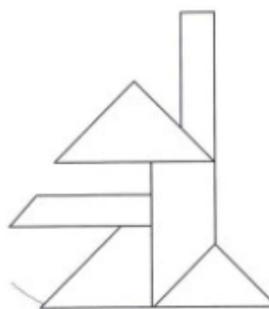


Figura B

"Dovete ritagliare da un cartone un puzzle simile a questo modello (Figura A). Con i suoi pezzi si possono fare varie costruzioni, come quella che appare nella Figura B. Ma poiché serve ai bambini della scuola d'infanzia, dovete farlo più grande. Per esempio, il lato che misura 4 cm nel modello, dovrà misurare 7 cm nella nuova produzione. Ma bisogna poter fare le stesse figure sia con il puzzle grande che con il modello. Per realizzarlo lavorerete a gruppi. Ogni gruppo farà un solo pezzo e poi metterete insieme i pezzi in un secondo tempo."